

Série A, N° 881

N° d'ordre : 905

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
(MENTION SCIENCES)

PAR

Emile ARGENCE

1^{re} THÈSE :

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE L'OPTIQUE
GÉOMÉTRIQUE DE L'IONOSPHERE

2^e THÈSE :

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 25 juin 1959 devant la Commission d'examen

MM. Louis DE BROGLIE, Président

M. COTTE } Examineurs
K. RAWER }
Th. KAHAN



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Série A, N° 881

N° d'ordre : 905

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ

(MENTION SCIENCES)

PAR

Emile **ARGENCE**

1^{re} THÈSE :

CONTRIBUTION À L'ÉTUDE DE L'OPTIQUE
GÉOMÉTRIQUE DE L'IONOSPHERE

2^e THÈSE :

Propositions données par la Faculté

Soutenues le 25 juin 1959 devant la Commission d'examen

MM. Louis DE BROGLIE, Président

M. COTTE

K. RAWER

Th. KAHAN

} Examinateurs



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen J. PÉRÈS

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure	GALLIEN	T	Embryologie
DE BROGLIE	T	Théories physiques	EICHHORN	T	Biologie végétale (S.P.C.N.)
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées	DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.)
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications	Mlle CAUCHOIS	T	Chimie physique
BARRABE	T	Géologie structurale et Géologie appliquée	THEILLIER	T	Physique du Globe
BOURCART	T	Géographie physique et Géologie dynamique	L'HÉRITIER	T	Génétique
PLANTEFOL	T	Botanique	GRIVET	T	Radioélectricité
GRASSÉ	T	Evolution des êtres organisés	PONCIN	T	Mécanique générale
PRÉVOST	T	Chimie organique	DUBREIL	T	Arithmétique et Théorie des nombres
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie	QUELET	T	Chimie organique
CHAUDRON	T	Chimie appliquée	CAGNIARD	T	Géophysique appliquée
WYART	T	Minéralogie	CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire
TEISSIER	T	Zoologie	CUVILLIER	T	Micropaléontologie
MANGENOT	T	Biologie végétale	JUNG	T	Pétrographie
P. AUGER	T	Physique quantique et Relativité	TRILLAT	T	Microscopie et Diffraction électronique
MONNIER	T	Physiologie générale	WIEMANN	T	Chimie organique et structurale
PIVETEAU	T	Paléontologie	JACQUINOT	T	Spectroscopie et Physique céleste
ROCARD	T	Physique (E.N.S.)	VASSY	T	Physique de l'atmosphère
H. CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.)	DESTOUCHES	T	Théories physiques
LAFFITTE	T	Chimie générale	M. PRIVOST	T	Géologie
FAVARD	T	Géométrie supérieure	AMIEL	T	Chimie générale
COULOMB	T	Physique du Globe	HOCART	T	Minéralogie
Mlle COUSIN	T	Biologie animale (S.P.C.N.)	J.-P. MATHIEU	T	Physique (option) (Orsay)
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale	COUTEAUX	T	Biologie animale (P.C.N.)
P. DRACH	T	Zoologie	MAY	T	Zoologie (Orsay)
KASTLER	T	Physique (E.N.S.)	CHOQUET	T	Théorie des fonctions Topologie
EPHRUSSI	T	Génétique	FELDMANN	T	Biologie végétale
WURMSER	T	Biologie physico-chimique	GUINIER	T	Physique des solides
RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N., Orsay)	JOST	T	Physiologie comparée
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.)	FORTET	T	Calcul des probabilités Physique mathématique
LUCAS	T	Recherches physiques	SCHWARTZ	T	Calcul différentiel et intégral
A. THOMAS	T	Biologie cellulaire	CHOUARD	T	Physiologie végétale
ARNULF	T	Optique appliquée	MALAVARD	T	Aviation
M. MORAND	T	Enseignement de Physique	BRELOT	T	Calcul différentiel
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.)	NORMANT	T	Synthèse organique
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides	BÉNARD	T	Chimie minérale
DANJON	T	Astronomie	BUVAT	T	Botanique (E.N.S.)
PETIT	T	Biologie maritime	DUGUE	T	Statistiques mathématiques
QUÉNEY	T	Météorologie et Dynamique atmosphérique	GELOSO	T	Chimie (S.P.C.N.)
			SOULAIRAC	T	Psychophysiologie

RICH	T	Physiologie végétale	CAMUS	Physiologie végétale (3 ^e cycle)
RÉCHAL	T	Optique théorique et ap- pliquée	CASTAING	Physique générale
RRMANN	T	Théories chimiques	CURIEN	Minéralogie et Cristallogra- phie
IADEFAUD	T	Botanique	MOYSE	T Physiologie végétale (Orsay)
le LE BRETON	T	Physiologie générale	PANNETIER	Chimie (S.P.C.N.)
LEM	T	Mathématiques générales	POSSOMPES	T Zoologie
LONG	T	Mathématiques générales	PULLMANN	Chimie théorique
VILLERS	T	Anatomie et Histologie comparées	TEILLAC	Physique nucléaire et Radioactivité
RESMANN	T	Topologie algébrique	TONNELAT	Biologie physico-chimique
ANÇON	T	Physique (S.P.C.N.)	VILLE	T Econométrie
ANGEAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique	WILLEMART	Chimie (P.C.B.)
EMENT	T	Mathématiques (M.G.P.)	DODÉ	T Chimie (S.P.C.N., Orsay)
OT	T	Technique mathématique de la Physique	FREYMAN	T Physique générale
ROCH	T	Géologie	GUINOCHET	T Biologie végétale (Orsay)
HATZMANN	T	Astrophysique	ROLLET	T Chimie (P.C.B.)
RMIER	T	Paléontologie stratigra- phique	Mlle JOSIEN	T Chimie (P.C.B.)
AMANSKY	T	Mathématiques générales	CHEVALLEY	T Géométrie algébrique et théorie des groupes
ENNUIER	T	Physique (M.G.P.)	ARNOULT	T Electronique
ZET		Génétique	CHAPELLE	T Physique (M.P.C., Orsay)
OUTHIER	T	Géologie appliquée	DELANGE	T Mathématiques (Orsay)
me TONNELAT	T	Relativité	DENY	T Mathématiques (M.G.P.)
IXMIER	T	Mathématiques (M.P.C.)	GERMAIN	T Mécanique théorique des fluides
OUCHAY	T	Chimie générale	G. LUCAS	T Géologie
IGRAIN	T	Electrotechnique générale	ALLARD	Chimie physique
RUSSET		Chimie minérale	BERTHELOT	Physique nucléaire et Radioactivité
I. LÉVY	T	Physique théorique des hautes énergies	BRICARD	Météorologie et physique de l'atmosphère
me CHAIX		Chimie biologique	Mme ALBE- FESSARD	Psychophysiologie
me HUREL-PY		Biologie végétale (P.C.B.)	FRIEDEL	Physique des solides
EAUX		Chimie (M.P.C.)	M. JULIA	Etude des molécules or- ganiques complexes
RUN	T	Mécanique expérimentale des fluides	LENDER	Biologie animale (S.P.C.N., Orsay)
EDERER	T	Chimie biologique	MAGAT	Physicochimie des rayonnements
me DUBREIL	T	Mathématiques	Mlle QUINTIN	T Electrochimie
me LELONG	T	Mathématiques (E.N.S.)	MONOT	T Chimie du métabolisme
ELLAIR	T	Géologie (S.P.C.N.)	BENOIT	T Physiologie animale
OTTE	T	Physique (Orsay)	DE POSSEL	T Analyse numérique
-E. DUBOIS	T	Chimie organique	CHARLOT	T Chimie analytique
AMOTTE		Zoologie (E.N.S.)	HAÏSSINSKY	T Radiochimie
ndré MICHEL	T	Chimie (S.P.C.N.)	LEMÉE	T Physiologie (B.M.P.V.)
LMER	T	Energétique générale	GUÉRIN	T Chimie (M.P.C.)
OUAULT	T	Physique générale		
SAUTHIER	T	Mécanique appliquée		
ARCHIEWITZ	T	Chimie physique		
ROSSEL	T	Physique atomique		
USER		Physiologie comparée		

Secrétaire général C. MONIER

CONTRIBUTION A L'ETUDE DE L'OPTIQUE GEOMETRIQUE DE L'ATMOSPHERE

par E. BASTIEN

INTRODUCTION

A Monsieur Louis de BROGLIE

en témoignage de profonde reconnaissance

A Monsieur Jean DUFAY

en témoignage de respectueuse affection

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE DE L'IONOSPHERE

par E. ARGENCE,

INTRODUCTION

I. — Dans la première partie de ce travail consacrée aux milieux ionisés isotropes, après un rappel des résultats classiques relatifs à l'approximation de l'optique géométrique, nous avons examiné de façon approfondie la théorie de la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu ionisé isotrope absorbant. Antérieurement de tels milieux avaient été étudiés au siècle dernier par McCULLAGH et CAUCHY à propos de la réflexion métallique. Récemment l'étude a été reprise par M. ARZELIES et M. CAP.

Nous avons étendu à l'étude de ces milieux la méthode de SOMMERFELD et RUNGE établie par ces auteurs en vue de l'étude de l'optique géométrique des milieux transparents. La méthode généralisée introduit la notion d'ikonale complexe que l'on peut écrire sous forme vectorielle :

$$\vec{\nabla} \Phi = \vec{\mu} - i \vec{\chi}$$

où μ désigne le vecteur phase et χ le vecteur extinction. On en déduit que la loi de réfraction est applicable à de tels milieux ainsi qu'il résulte de la relation :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \Phi = 0.$$

Il est ainsi possible de déterminer les trajectoires de phase et d'énergie d'une onde électromagnétique.

La méthode d'approximation B.K.W. peut être étendue à l'étude des milieux dispersifs isotropes et absorbants; elle conduit à écrire l'intégrale de phase sous la forme :

$$\int \text{Re } A \, dz + i \int \text{Im } A \, dz$$

où A a pour expression :

$$A = \sqrt{P - iQ - P(o) \sin^2 \varphi_0}$$

P et Q étant des grandeurs caractérisant le milieu traversé par l'onde. $P(o)$ la valeur de P sur l'intersurface.

La partie réelle de l'expression précédente permet de déterminer la trajectoire de phase, la partie imaginaire, le décrément d'absorption.

L'utilisation des relations précédentes pour l'étude des milieux absorbants dispersifs isotropes conduit à rejeter la méthode proposée autrefois par EPSTEIN et examinée récemment par BREMMER. Du point de vue pratique, elle donne une estimation plus exacte de l'absorption exercée par le milieu; l'écart par rapport aux valeurs obtenues par l'ancienne méthode (théorème de MARTYN) peut être important lorsque la région traversée par l'onde est fortement absorbante (partie inférieure de la région E et région D de l'ionosphère).

L'étude des régions ionosphériques isothermes et non-isothermes nous a conduit à considérer différentes expressions analytiques du décrément d'absorption. Ces expressions nous ont permis, à la suite de mesures effectuées avec la collaboration de M. RAWER, d'évaluer la fréquence de collisions relative à la région F₂ nocturne.

Nous avons ainsi obtenu, compte tenu des phénomènes de focalisation :

$$\nu = 400 \text{ sec}^{-1}$$

en adoptant l'hypothèse de collisions électrons-molécules. L'existence de fréquences de collisions électrons-ions, discutée également, semble devoir être rejetée, en raison de la température exigée $T \simeq 200^\circ \text{K}$. Cette valeur est trop faible d'après les estimations récentes (fusées).

II. — Dans la deuxième partie de ce travail, nous effectuons une étude en vue de la détermination des trajectoires de phase et d'énergie d'une onde électromagnétique dans un milieu ionisé anisotrope transparent. Cette méthode dite directe évite l'utilisation de la théorie magnéto-ionique généralisée de BOOKER, GERSON et SEATON conduisant à des calculs impraticables. La notion de « paquet d'ondes » nous permet d'aboutir aux équations différentielles des trajectoires d'énergie (vecteur de POYNTING) que l'on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial z} = - \frac{1}{\cos \varphi_0} \frac{\partial (z' \sin \varphi_0)}{\partial \varphi_0} \\ \frac{\partial y}{\partial z} = - \frac{1}{\sin \varphi_0} \frac{\partial (z' \sin \varphi_0)}{\partial \Phi} \end{array} \right.$$

où $z' = \frac{dz}{dx}$ est relatif à la trajectoire de phase, φ_0 est l'angle d'incidence à la base de la région considérée, Φ l'angle d'anisotropie.

Cette méthode peut être étendue à l'étude des trajectoires de certains atmosphériques de grande longueur d'onde étudiés par ECKERSLEY et STOREY. L'intégration numérique peut être effectuée à l'aide de la méthode KUTTA-RUNGE.

Enfin, en ce qui concerne l'étude de la propagation des ondes courtes nous avons établi des formules approchées permettant de déterminer les trajectoires de phase et d'énergie. Ces trajectoires, dans le cas où l'on suppose une loi de distribution de la densité électronique variant quadratiquement avec l'altitude z (loi généralement vérifiée — ionosphère quète), peuvent être déterminées à l'aide des fonctions elliptiques. Nous avons examiné quelques cas intéressants du point de vue pratique et donné une estimation dans le cas des faibles et moyennes distan-

ces, c'est-à-dire lorsque l'on est en droit de négliger la courbure de la Terre et de l'ionosphère, des corrections à apporter au calcul de la fréquence maximum utilisable.

Nous avons montré comment le problème pouvait être traité dans le cas des grandes distances (ionosphère stratifiée et concentrique à la Terre).

Signalons que nous avons étudié également le problème de la détermination de la densité électronique avec l'altitude et examiné plusieurs types de solutions.

En ce qui concerne la documentation générale et les questions de mise au point, nous devons beaucoup à l'ouvrage fondamental de langue russe de Ia. L. ALPERT, E. L. FEINBERG et V. A. GINSBURG, *Propagation des ondes radioélectriques*, ainsi qu'à l'article particulièrement riche de M. BREMMER publié dans le *Handbuch der Physik* (Vol. 16).

Nous remercions M. le Professeur Louis de BROGLIE qui a bien voulu s'intéresser à ce travail, M. le Professeur COTTE dont les travaux cités en référence sont à l'origine de ce mémoire, M. le Professeur RAWER qui durant de longues années nous a fait bénéficier de sa riche expérience de géophysicien et a bien voulu diriger nos efforts, M. THEO KAHAN, Maître de Recherches dont l'ensemble des travaux effectués avec M. JANCEL concernant la théorie des milieux ionisés a été pour nous un guide précieux.

Nos remerciements vont enfin à M. Marcel MAYOT, directeur du laboratoire de calculs de l'Institut d'Astrophysique, dont l'aide pour l'exécution des calculs numériques et les conseils avisés nous ont été particulièrement utiles.

MILIEU ISOTROPE

CHAPITRE 1

CARACTERES GENERAUX DE LA PROPAGATION D'UNE ONDE PLANE

DANS UN MILIEU IONISE ISOTROPE

A) Détermination des indices de réfraction et d'extinction.

1. — La propagation d'une onde électromagnétique dépend d'une part des paramètres caractéristiques de l'onde considérée, et d'autre part des propriétés du milieu traversé. Cette propagation a un caractère vectoriel et elle est déterminée à partir des équations de MAXWELL caractérisant le champ électromagnétique.

Ecrivons le système des équations de MAXWELL dans le système d'unités de GAUSS :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

où $\vec{E}$ désigne le champ électrique, $\vec{H}$ le champ magnétique, $\vec{D}$ la polarisation diélectrique, $\vec{B}$ l'induction magnétique, ρ la densité électrostatique des charges et $\vec{J}$ la densité de courant.

Nous devons adjoindre au système (1) les relations :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} ; \quad \vec{B} = \mu \vec{H} ; \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (2)$$

ϵ désignant la constante diélectrique, σ la conductivité électrique et μ la perméabilité magnétique.

Pour les milieux considérés ici, nous pouvons poser $\mu = 1$. D'autre part, tenant compte du fait que le champ électrique est sinusoïdal de pulsation ω de sorte que symboliquement :

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$$

nous pouvons écrire le système (1) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \times \vec{E} = -i \frac{\omega}{c} \vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + i \frac{\omega}{c} \vec{D} \\ \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \vec{H} = 0. \end{array} \right. \quad (1')$$

Notons enfin que dans le cas d'un milieu anisotrope, nous avons à la place de la relation (2) la relation tensorielle :

$$D_i = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ik} E_k \quad (3)$$

2. — En raison du déplacement des charges, nous devons ajouter à la densité de courant $\vec{J}$ le vecteur $\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$, $\vec{P}$ désignant la polarisation [1] :

$$\vec{P} = \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \vec{E} \quad (4)$$

de telle sorte que nous aurons :

$$\vec{J}_t = \vec{J} + i\omega \vec{P} = \left(\sigma + i \frac{\epsilon - 1}{4\pi} \omega \right) \vec{E} \quad (5)$$

Nous considérons, pour simplifier l'écriture, une seule espèce de corpuscules électron ou ion de charge e dont la densité par cm^3 est N .

Dans ce cas, nous avons pour équation du mouvement d'un corpuscule :

$$m \ddot{\vec{r}} = e \vec{E} e^{i\omega t} \quad (6)$$

lorsque les forces de rappel et les collisions entre corpuscules sont négligées, ce qui correspond au cas d'un milieu transparent. Dans le cas d'un milieu absorbant, nous aurons l'équation du mouvement :

$$m \ddot{\vec{r}} + m\nu \dot{\vec{r}} = e \vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad (7)$$

où ν désigne la fréquence de collisions. Nous voyons que le nombre de chocs joue le rôle d'un coefficient de frottement; cette façon intuitive d'écrire l'équation (7) peut être justifiée à partir de considérations simples empruntées à la théorie cinétique des gaz [2].

Nous pouvons écrire l'équation (7) sous la forme :

$$im\omega \vec{v} + m\nu \vec{v} = e \vec{E} \quad (8)$$

D'où nous tirons :

$$\vec{v} = \frac{ie \vec{E}}{m(i\nu - \omega)} \quad (9)$$

et nous avons pour valeur de la densité de courant :

$$\vec{J}_t = Ne \vec{v} \quad (10)$$

Compte tenu des relations (5), (9) et (10), nous obtenons pour expression de la constante diélectrique ϵ et de la conductivité σ :

$$\begin{aligned} \epsilon &= 1 - \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega^2 + \nu^2)} \\ \sigma &= \frac{\nu Ne^2}{m(\omega^2 + \nu^2)}. \end{aligned} \quad (11)$$

3. — Enfin, nous pouvons former à partir du système (I) l'équation de propagation.

Utilisons la relation :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E} + \nabla(\nabla \cdot \vec{E})$$

nous obtenons :

$$\nabla^2 \vec{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon' \vec{E} - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = 0 \quad (12)$$

où ϵ' représente la constante diélectrique complexe :

$$\epsilon' = \epsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (13)$$

Considérons maintenant une onde dont le plan d'onde est normal à la direction Oz , on supposera en outre dans tout ce qui suit que la constante diélectrique ϵ' est uniquement fonction de z .

Le champ électrique de l'onde a pour expression :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon'} z} \quad (14)$$

$\left(\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} ; \lambda_0 \text{ étant la longueur d'onde relative au vide} \right)$

$\sqrt{\epsilon'}$ joue ainsi le rôle d'indice de réfraction complexe :

$$\sqrt{\epsilon'} = \mu - i\chi. \quad (15)$$

Compte tenu de (13), nous obtenons pour expression de $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm i \frac{\omega}{c} \mu z \mp \frac{\omega}{c} \chi z} \quad (16)$$

Nous voyons ainsi que χ joue le rôle d'indice d'extinction.

La relation (13) nous donne les valeurs des indices μ et χ en fonction des grandeurs caractérisant le milieu ϵ et σ .

$$\begin{cases} \mu = \sqrt{\frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}} \\ \chi = \sqrt{-\frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2}} \end{cases} \quad (17)$$

Par la suite, nous poserons, afin d'éviter toute confusion de notations :

$$P = \epsilon \qquad Q = \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} P &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2} \\ Q &= \frac{\nu}{\omega} \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2} \end{aligned} \quad (18)$$

où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}}$$

désigne la *pulsation de plasma*.

B) Propriétés générales du milieu traversé par l'onde.

1. — Du point de vue de la théorie cinétique un gaz est caractérisé par sa fonction de distribution $f(t, \vec{r}, \vec{v})$ déterminée de telle sorte que le nombre moyen de particules dN dans l'élément de volume $d\vec{r} d\vec{v} = dx dy dz dr_x dv_y dv_z$ est égal à :

$$dN = f d\vec{r} d\vec{v}. \quad (19)$$

Par définition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \vec{r}, \vec{v}) d\vec{v} = N \quad (20)$$

N désignant la concentration des particules considérées à l'instant t et au point $\vec{r}$.

D'autre part, on démontre en théorie du plasma qu'en l'absence de champ magnétique, f satisfait à l'équation :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_r f + \frac{e}{m} \vec{E} \cdot \nabla_v f + S = 0 \quad (21)$$

avec

$$\nabla_r = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}; \quad \nabla_v = \vec{i} \frac{\partial}{\partial v_x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial v_y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial v_z};$$

où e et m sont la charge et la masse des particules étudiées, E l'intensité du champ électrique. S est l'intégrale des collisions déterminant la variation de la fonction f due aux collisions des électrons entre eux et avec toutes les autres particules : molécules et ions constituant le plasma. On peut inclure dans S des termes correspondant à l'action de la diffusion, de l'ionisation, etc.

En l'absence de champ la fonction de distribution est la fonction de MAXWELL :

$$f = f_0(v) = N \left(\frac{m}{2\pi KT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2KT}}$$

où K désigne la constante de BOLTZMANN.

La distribution de MAXWELL satisfait à la condition (20) étant donné que :

$$\int f_0 d\vec{v} = 4\pi \int f_0 v^2 dv = N \quad (22)$$

Si le gaz ionisé (plasma) subit l'action d'un champ variable alors la fonction f n'est plus la fonction de MAXWELL ; si le champ est intense, elle peut même en différer profondément. On montre alors que l'on a en *première approximation* la loi de distribution de DRUYVESTEYN [3]

$$f = f_0 + \frac{\vec{v} \cdot \vec{f}_1(v)}{v} \quad (23)$$

2. — Nous allons introduire maintenant la notion d'écran due à DEBYE [4] valable pour un plasma dense.

Nous supposons que les gaz d'électrons et d'ions positifs sont en équilibre thermique, la relation existant alors entre le potentiel φ et la charge d'espace est définie à l'aide de l'équation de POISSON :

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \rho \quad (24)$$

où l'on a

$$\rho = \sum N_i e_i$$

N_i : désigne la densité des ions de i ème espèce, e_i leur charge. En raison de l'état d'équilibre de température, les densités satisfont à l'équation de BOLTZMANN, de sorte que nous pouvons écrire l'équation (24) sous la forme :

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \sum_i e_i N_i^{(0)} e^{-\frac{e_i \varphi}{KT}} \quad (25)$$

c'est-à-dire si φ est petit :

$$e^{-\frac{e_i \varphi}{KT}} \approx 1 - \frac{e_i \varphi}{KT} \quad (26)$$

le plasma étant neutre :

$$\sum N_i^{(0)} e_i = 0 \quad (27)$$

et nous obtenons à partir de (25)

$$\nabla^2 \varphi = \frac{4\pi}{KT} \sum_i N_i^{(0)} e_i^2 \varphi \quad (28)$$

Si nous considérons le plasma comme étant constitué par des électrons libres et des ions positifs, alors :

$$N_1^{(0)} = N_2^{(0)} = N; \quad e_1 = e_2 = e. \quad (29)$$

Ecrivons l'équation (28) sous la forme

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{p_D^2} \varphi = 0 \quad (30)$$

nous avons :

$$p_D = \sqrt{\frac{KT}{8\pi N e^2}} \quad (31)$$

p_D qui a les dimensions d'une longueur définit ce que l'on appelle la « distance de DEBYE ».

Dans le cas d'un potentiel sphérique, nous pouvons résoudre l'équation (30) qui s'écrit maintenant :

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) - \frac{1}{p_D^2} \varphi(r) = 0 \quad (32)$$

cette équation admet pour solution :

$$\varphi(r) = A \frac{e^{-\frac{r}{p_D}}}{r} + B \frac{e^{\frac{r}{p_D}}}{r} \quad (33)$$

étant donné qu'à l'infini φ s'annule, nous devons avoir $B = 0$, φ a la même forme que le potentiel de YUKAWA; nous voyons enfin que le champ électrique, dans un milieu où existe une neutralisation due à la charge d'espace, agit sensiblement à l'intérieur d'une sphère de rayon p_D .

En l'absence d'équilibre thermique, si la température électronique T_e est différente de la température ionique T_i , on montre que l'on a

$$p_D = \sqrt{\frac{K}{4\pi N e^2}} \sqrt{\frac{T_e T_i}{T_e + T_i}} \quad (34)$$

et si $T_e \gg T_i$ alors :

$$p_D \approx \sqrt{\frac{KT_i}{4\pi N e^2}} \quad (35)$$

3. — Enfin, il convient de donner quelques précisions concernant la fréquence de collision ν . Si $\bar{l}$ désigne le libre parcours moyen, $\bar{v}$ la vitesse moyenne de déplacement des corpuscules, nous avons pour expression de la fréquence de collision :

$$\nu = \frac{v}{\bar{l}} \quad (36)$$

On montre alors en théorie des collisions que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \nu_m = \frac{v}{l_m} = q_m(v) v N_m \\ \nu_i = \frac{v}{l_i} = q_i(v) v N_i \end{array} \right. \quad (37)$$

et

$$q_{m,i} = 2\pi \int q_{m,i}(v, \theta) (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (38)$$

les limites de l'intégrale dépendant de la nature du phénomène de diffusion. Les indices m et i désignent l'espèce de corpuscules avec laquelle s'effectue la collision — molécule ou ion — $q_{m,i}(v, \theta)$ est la section efficace différentielle pour les collisions élastiques, les seules qui nous intéressent ici.

Dans le cas des molécules, assimilées à des sphères rigides :

$$q_m(v, \theta) = \frac{a^2}{4}. \quad (39)$$

Il résulte alors de l'expression (38), les limites d'intégration étant 0 et π :

$$q_m(v) = \pi a^2 \quad (40)$$

Dans le cas d'une interaction du type électron-ion, nous avons la relation de RUTHERFORD [5] :

$$q_i(v, \theta) = \frac{1}{4} \left(\frac{e^2}{m v^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}.$$

Utilisant alors la relation (35), nous obtenons :

$$q_i(v) = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^2}{m v^2} \right)^2 \int_{\theta_m}^{\pi} \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} (1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta = 2\pi \left(\frac{e^2}{m v^2} \right)^2 \text{Log} \left(1 + \cotg^2 \frac{\theta_m}{2} \right) \quad (42)$$

(θ_m étant l'angle minimum de déviation), c'est-à-dire compte tenu de la relation :

$$\cotg \frac{\theta_m}{2} = \frac{p_m m v^2}{e^2}$$

où p_m désigne le paramètre d'impact et v la vitesse de l'électron à l'infini :

$$q_i(v) = 2\pi \left(\frac{e^2}{m v^2} \right)^2 \text{Log} \left(1 + \frac{p_m^2 m^2 v^4}{e^4} \right) \quad (43)$$

Ces relations nous seront utiles par la suite lorsque nous aurons à déterminer la fréquence de collision efficace ν_{eff} .

CHAPITRE 2

PROPAGATION D'UNE ONDE DANS UN MILIEU ISOTROPE INHOMOGENE

A) Approximation B.K.W.

1. — Dans le cas général, c'est-à-dire pour une expression analytique donnée de la constante diélectrique $\epsilon'(\omega, z)$; on ne sait pas former la solution générale de l'équation d'ondes :

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon'(\omega, z) E = 0. \quad (1)$$

Pour des expressions particulières de la constante diélectrique, la solution générale peut s'exprimer analytiquement. Le cas d'une variation linéaire de la constante diélectrique a été traité par GANS [6], celui de la variation exponentielle par GANS [6] et VAN DER WYCK [7]; EPSTEIN [8] et M. RAWER [9] ont trouvé une solution d'un caractère très général s'exprimant à l'aide des fonctions hypergéométriques, pour une constante diélectrique d'expression :

$$\epsilon(z) = 1 - P \frac{e^{\gamma z}}{1 + e^{\gamma z}} - M \frac{4 e^{\gamma z}}{(1 + e^{\gamma z})^2}$$

Il existe différentes méthodes permettant de déterminer des solutions approchées de l'équation (1) lorsque l'on admet une variation lente de $\varepsilon'(z)$. La méthode B.K.W. [5] [24] dont nous allons rappeler l'essentiel permet d'étudier les phénomènes de propagation à l'approximation de l'optique géométrique.

Supposons initialement que ε' est constant, nous avons alors pour solution de l'équation (1) :

$$E = E_0 e^{\pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon'} z} = E_0 e^{\pm i \frac{\omega}{c} \mu z \pm \frac{\omega}{c} \chi z} \quad (2)$$

Si l'on suppose d'autre part que le milieu est inhomogène et que ses propriétés varient peu sur un trajet de l'onde de l'ordre de la longueur d'onde du signal, alors la région considérée se comportera comme un milieu homogène dont la constante diélectrique varie de façon sensiblement continue le long du parcours de l'onde, de sorte que nous pourrions substituer à μz et χz les grandeurs $\int \mu dz$ et $\int \chi dz$. Nous supposerons également que la relation de M. Louis de BROGLIE :

$$\frac{d\varepsilon}{dz} \lambda \ll \varepsilon \quad (3)$$

est satisfaite. λ désignant ici la longueur d'onde dans le milieu considéré. Nous allons procéder à la détermination des solutions approchées de l'équation (1).

2. — *Première approximation.* — Nous admettons que la solution de l'équation (1) peut être écrite sous la forme :

$$E(z) = E_0(z) e^{-i \frac{\omega}{c} \Phi(z)} \quad (4)$$

$E_0(z)$ et $\Phi'(z)$ étant supposés varier lentement : si nous portons l'expression précédente de $E_0(z)$ dans (1), nous obtenons :

$$E_0'' - 2i \frac{\omega}{c} \Phi' E_0' - i \frac{\omega}{c} \Phi'' E_0 + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 (\varepsilon' - \Phi'^2) E_0 = 0 \quad (5)$$

D'autre part si $D \gg \lambda_0$ nous avons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{c^2}{\omega^2} E_0'' \sim \frac{\lambda^2}{D^2} E_0 \\ 2i \frac{c}{\omega} \Phi' E_0' \sim \frac{\lambda_0}{D} \Phi' E_0 \\ i \frac{c}{\omega} \Phi'' E_0 \sim \frac{\lambda_0}{D} \Phi' E_0 \end{array} \right. \quad \left(\frac{c^2}{\omega^2} = \frac{\lambda_0^2}{4\pi^2} \right)$$

Ecrivons que les termes de coefficients $\frac{\omega}{c}$ et $\left(\frac{\omega}{c} \right)^2$ sont nuls :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varepsilon' - \Phi'^2) E_0 = 0 \\ E_0' + \frac{\Phi''}{2\Phi'} E_0 = 0. \end{array} \right. \quad (6)$$

D'où l'on déduit :

$$\Phi = \pm \int_{z_0}^z \sqrt{\varepsilon'} dz = \pm \int_{z_0}^z \mu(z) dz \mp i \int_{z_0}^z \chi(z) dz \quad (7)$$

La phase se trouve ainsi déterminée.

La seconde équation (6) nous permet d'écrire :

$$E_0 = \frac{c}{\sqrt{\Phi'}} = \frac{c}{\sqrt[4]{\epsilon'}} = \frac{c}{\sqrt{\mu - i\chi}} \quad (8)$$

et nous obtenons pour solution approchée de (1) :

$$E(z) = \frac{c}{\sqrt[4]{\epsilon'(z)}} e^{\pm i \frac{\omega}{c} \int_{z_0}^z \sqrt{\epsilon'(z)} dz} = \frac{c}{\sqrt{\mu(z) - i\chi(z)}} e^{\mp \frac{\omega}{c} \int_{z_0}^z \chi(z) dz \pm i \frac{\omega}{c} \int_{z_0}^z \mu(z) dz} \quad (9)$$

Nous voyons qu'à l'approximation de l'optique géométrique, les ondes déterminées par le double signe ($\pm$) sont indépendantes.

Les égalités (6) lorsqu'elles sont satisfaites, laissent subsister le terme E''_0 pour que l'approximation soit légitime, nous devons avoir :

$$E'' \ll \frac{\omega}{c} |\Phi' E'_0| \quad (10)$$

En introduisant dans (10) les expressions (7) et (8), nous obtenons la condition :

$$\left| -\frac{\Phi'''}{2\Phi'} + \frac{3}{4} \left(\frac{\Phi''}{\Phi'} \right)^2 \right| \ll \frac{2\pi |\Phi''|}{\lambda_0}$$

les inégalités suivantes devront être respectées :

$$\frac{\lambda_0 \sqrt{\mu'^2 + \chi'^2}}{2\pi(\mu^2 + \chi^2)} \ll 1 ; \quad \frac{\lambda_0 \sqrt{\mu''^2 + \chi''^2}}{2\pi\sqrt{(\mu^2 + \chi^2)(\mu'^2 + \chi'^2)}} \ll 1. \quad (11)$$

Les inégalités (11) nous conduisent aux relations suivantes valables en l'absence d'absorption :

$$\frac{\lambda_0}{2\pi} \left| \frac{\mu'}{\mu^2} \right| \ll 1 ; \quad \frac{\lambda_0}{2\pi} \left| \frac{\mu''}{\mu\mu'} \right| \ll 1. \quad (12)$$

3. *Approximation d'ordres supérieurs.* — Nous pouvons écrire la solution de l'équation (1) sous la forme d'un développement :

$$E(z) = \left[E^{(0)} + \frac{c}{\omega} E^{(1)} + \left(\frac{c}{\omega} \right)^2 E^{(2)} + \dots \right] e^{-i \frac{\omega}{c} \Phi} \quad (13)$$

et nous proposer de déterminer les fonctions $E^{(0)}$, $E^{(1)}$... ; Φ . Si nous portons l'expression (13) dans l'équation (1), nous obtiendrons un développement ordonné suivant les puissances entières positives et négatives de $\frac{\omega}{c}$; le premier terme étant

de la forme $A \left(\frac{\omega}{c} \right)^2$.

Si nous écrivons que le développement ainsi formé s'annule quel que soit $\frac{\omega}{c}$ nous obtenons alors les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\epsilon' - \Phi'^2) E^{(0)} = 0 \\ E'^{(0)} + \frac{\Phi''}{2\Phi'} E^{(0)} = 0 \\ E'^{(1)} + \frac{\Phi''}{2\Phi'} E^{(1)} = \frac{E''^{(0)}}{2i\Phi'} \end{array} \right. \quad (14)$$

etc...

Les deux premières équations nous donnent les solutions (7) et (8) déjà formées. La troisième équation nous permet de déterminer $E^{(1)}$.

L'approximation de l'optique géométrique est applicable si l'on peut dans (13) se limiter au premier terme, c'est-à-dire si :

$$\frac{\lambda_0}{2\pi} |E^{(1)}| \ll |E^{(0)}| \quad (15)$$

Si la fonction $\mu(z)$ est monotone dans l'intervalle (z_0, z) et si nous tenons compte de la relation (15) et de la valeur de $E^{(0)}$:

$$E^{(0)} = \frac{c}{\sqrt{\mu}}$$

nous déduisons alors de (14) après quelques transformations simples l'inégalité :

$$\left| \int_{z_0}^z \frac{1}{\mu^2} \frac{d\mu}{dz} d(\text{Log } \mu) \right| = \int_{z_0}^z \frac{1}{\mu^2} \frac{d\mu}{dz} d(\text{Log } \mu) \leq \left(\frac{1}{\mu^2} \frac{d\mu}{dz} \right)_M \text{Log } \mu_M \quad (16)$$

l'indice M indiquant que l'on prend les valeurs maxima des grandeurs correspondantes.

Nous voyons ainsi que l'inégalité (15) sera satisfaite si dans l'intervalle considéré les conditions :

$$\frac{\lambda_0}{2\pi} \left| \frac{d\mu}{dz} \right| \ll 1 \quad (17)$$

et

$$|\text{Log } \mu| \leq 1 \quad (18)$$

sont remplies.

Pratiquement, seule la condition (17) est essentielle, elle est équivalente du reste à la condition (12) ; il en résulte que la deuxième inégalité (12) imposant des limites aux valeurs de la dérivée $\frac{d^2\mu}{dz^2}$ est superflue pour la justification de la légitimité de l'approximation de l'optique géométrique. Nous admettrons d'autre part que $\frac{d\mu}{dz}$ ne subit pas de variations brusques.

Enfin la monotonie de la fonction $\mu(z)$ est essentielle si l'on veut que les conditions (17) et (18) soient satisfaites. Si la fonction $\mu(z)$ n'est pas monotone ce qui est le cas, par exemple, de la fonction :

$$\mu(z) = 1 + m \cos \Omega z$$

alors la condition intégrale que l'on obtient à partir de (14)₃ c'est-à-dire :

$$E^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{\Phi'}} \int_{z_0}^z \frac{E''^{(0)}}{2i\sqrt{\Phi'}} dz = \frac{1}{\sqrt{\epsilon'}} \int_{z_0}^z \frac{E''^{(0)}}{2i\sqrt{\epsilon'}} dz$$

ne se réduit pas en général à une condition différentielle du type (17) et (18), le rapport $\frac{E^{(1)}}{E^{(0)}}$ peut croître avec la différence $z - z_0$.

La condition (17) n'est pas respectée dans deux cas :

- a) s'il existe des variations brusques du gradient de μ ;
- b) si l'indice de réfraction μ est suffisamment petit.

Dans l'ionosphère, les variations brusques du gradient de μ sont en général liées à la présence de phénomènes sporadiques et n'ont donc pas un caractère permanent. Pour des couches ionosphériques normales nous avons, en ce qui con-

cerne la région E, par exemple : $\frac{d\mu}{dz} \sim 10^{-6}$; de même pour la région F :

$\frac{d\mu}{dz} \sim 10^{-7}$, avec $\lambda_0 \sim 6 \cdot 10^4$ cm pour la région E, la condition (17) nous donne $\mu^2 \gg 10^{-2}$, pour $\lambda_0 = 6 \cdot 10^3$ cm nous avons $\mu^2 \gg 10^{-4}$.

Nous avons indiqué plus haut qu'à l'approximation de l'optique géométrique les ondes incidente et réfléchie étaient indépendantes. Ce fait met bien en évidence le caractère de cette approximation qui cesse d'être valable au voisinage de la région de réflexion, dite région de transition; cette réflexion ayant lieu, par exemple, lorsque le gradient présente une variation brusque. Notons que, lorsque l'on fait tendre vers zéro l'épaisseur de la région de transition, définissant ainsi une limite de séparation, on obtient les formules bien connues de FRESNEL.

Il existe également une réflexion lorsque l'indice μ s'annule. Cette réflexion en l'absence d'absorption est totale si, au delà de l'altitude, définie par la condition $\epsilon = \mu^2 = 0$ et correspondant à des valeurs négatives de ϵ la concentration des électrons continue d'augmenter sur une distance D, telle que :

$$D \gg \lambda_0.$$

La notion de réflexion totale prend une signification très claire si l'on remarque que dans la région définie par $\epsilon < 0$ l'onde s'amortit (χ étant supposé nul par hypothèse) car l'on a :

$$\mu = i \sqrt{|\epsilon|}$$

et :

$$E \sim e^{-\frac{\omega}{c} \int \sqrt{|\epsilon|} dz}$$

il en résulte que pour une distance $D \gg \lambda_0$ le champ devient pratiquement nul.

Pour préciser davantage ces particularités du comportement de l'onde électromagnétique, nous allons rappeler quelques propriétés de l'équation de propagation pour le cas d'une variation linéaire de la constante diélectrique avec l'altitude.

B) Equation d'ondes (Cas d'une variation linéaire de la constante diélectrique).

1. *Absence d'absorption.* — Nous avons pour expression de la constante diélectrique :

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi N(z) c^2}{m \omega^2} = 1 - \frac{z}{z_m} \quad (z \geq 0) \quad (19)$$

Si nous effectuons le changement de variable :

$$v = \left(\frac{\omega^2}{c^2 z_m} \right)^{\frac{1}{3}} (z - z_m) = \left(\frac{\omega}{c} z_m \right)^{\frac{2}{3}} \epsilon(z) \quad (20)$$

nous obtenons l'équation différentielle d'Airy :

$$\frac{d^2 E}{dv^2} + v E = 0 \quad (21)$$

dont la solution générale peut être exprimée à l'aide de l'intégrale d'Airy :

$$E = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \cos \left(\frac{x^3}{3} - vx \right) dx \quad (22)$$

ou à l'aide des fonctions de BESSEL d'ordre $1/3$:

$$\begin{cases} E = \alpha \sqrt{v} \left[J_{1/3} \left(\frac{2}{3} v^{3/2} \right) + J_{-1/3} \left(\frac{2}{3} v^{3/2} \right) \right] & (v > 0) \\ E = \alpha \sqrt{-v} \left[-I_{1/3} \left\{ \frac{2}{3} (-v)^{3/2} \right\} + I_{-1/3} \left\{ \frac{2}{3} (-v)^{3/2} \right\} \right] & (v < 0) \end{cases} \quad (23)$$

Si la condition $v \gg 1$ est réalisée, nous avons pour expression asymptotique de E :

$$E \simeq \frac{3\alpha}{\sqrt{\pi}} v^{-1/4} \cos \left(\frac{2}{3} v^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (24)$$

En vertu de (20), la condition de légitimité de l'approximation précédente peut s'écrire :

$$v = \left(\frac{\omega}{c} \right)^{2/3} \left(1 - \frac{z}{z_m} \right) = \left(\frac{2\pi}{\lambda_0 \left| \frac{d\varepsilon}{dz} \right|} \right)^{2/3} \varepsilon \gg 1 \quad (25)$$

nous avons tenu compte du fait que :

$$z_m = \frac{1}{\left| \frac{d\varepsilon}{dz} \right|} \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad (26)$$

(26) est précisément la condition de validité de l'optique géométrique.

La solution (24) est une combinaison de solutions approchées de l'optique géométrique étant donné que l'on a :

$$v^{-1/4} \sim \frac{1}{\sqrt{\mu(z)}}$$

et

$$\frac{2}{3} v^{3/2} = \frac{2\omega}{c} z_1 \varepsilon^{3/2}(z) = \frac{\omega}{c} \int \mu(z) dz \quad (27)$$

Supposons maintenant qu'à l'origine de la couche ($z = 0$) l'amplitude de l'onde incidente E_0 est égale à l'unité, autrement dit, le champ est de la forme $E_0 = e^{i\omega t}$; dans ce cas les ondes incidente et réfléchie seront définies par (23); et suivant l'approximation admise (24) :

$$E = E_0 + E_1 = 1 + e^{-i \left(\frac{2}{3} \frac{\omega}{c} z_m - \frac{\pi}{2} \right)} \quad (28)$$

La constante α ayant pour valeur :

$$\alpha = \frac{2}{3} \sqrt{\pi} \left(\frac{\omega}{c} z_m \right)^{1/6} e^{-i \left(\frac{2}{3} \frac{\omega}{c} z_m - \frac{\pi}{4} \right)} \quad (29)$$

et nous obtenons pour expression de la différence de phase entre l'onde incidente et l'onde réfléchie :

$$\psi = \frac{4}{3} \frac{\omega}{c} z_m - \frac{\pi}{2} = \frac{2\omega}{c} \int_0^{z_m} \mu(z) dz - \frac{\pi}{2} \quad (30)$$

2. *En présence d'absorption*, le problème n'offre pas de difficultés particulières, l'utilisation de la constante diélectrique complexe : $\varepsilon' = (\mu - i\chi)^2$ nous conduit alors aux expressions suivantes de la phase et du coefficient de réflexion [24] :

$$\psi = \frac{2\omega}{c} \left[\int_0^{z_m} \mu(z) dz - \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega} \right)^{3/2} z_m \right] - \frac{\pi}{2} \\ - \text{Log } \rho = \frac{2\omega}{c} \left[\int_0^{z_m} \chi(z) dz + \frac{\sqrt{2}}{3} \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega} \right)^{3/2} z_m \right] \quad (31)$$

C) Equation de propagation à incidence oblique.

Nous supposons que la normale au plan d'onde est située dans le plan xz (plan d'incidence).

A l'entrée de la région ionisée l'onde plane incidente a pour expression :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i \frac{\omega}{c} (x \sin \varphi_0 + z \cos \varphi_0)} \quad (32)$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i \vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$$

avec

$$\vec{k}_0 = \frac{\omega}{c} \begin{Bmatrix} \sin \varphi_0 \\ 0 \\ \cos \varphi_0 \end{Bmatrix} \quad \vec{r} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$$

L'absorption est nulle par hypothèse et la constante diélectrique égale à l'unité. Les axes sont choisis de telle façon que $k_{oy} = 0$ ce qui est toujours possible et ne modifie pas la généralité du problème; ce choix demeure valable lorsque l'onde a pénétré dans le milieu ionisé puisque la constante diélectrique est uniquement fonction de z .

Nous pouvons écrire à partir de (I, 12)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon(z) E_x - \frac{\partial}{\partial x} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon(z) E_z - \frac{\partial}{\partial z} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \end{cases} \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon(z) E_y = 0 \quad (34)$$

Le champ $\vec{E}$ est décomposé suivant trois composantes perpendiculaires, l'une de ces composantes est parallèle à l'axe $y' y$. Cette composante est indépendante des deux autres.

Nous nous limiterons ici à une étude sommaire de l'équation différentielle (34).

L'équation d'ondes (34) ne diffère de l'équation (1) que par la présence du terme $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2}$; posons :

$$E_y = F(z) e^{\pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon} \sin \varphi} \quad (35)$$

que nous écrirons sous la forme plus condensée

$$E_y = F(z) e^{\pm i k \alpha} \quad (36)$$

avec

$$k(z) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(z)} \quad \text{et} \quad \alpha(z) = \sin \varphi(z)$$

Si nous portons l'expression (36) dans l'équation (37) nous obtenons, toute réduction faite, après avoir écrit que la nouvelle équation doit être vérifiée quel que soit x :

$$\frac{d(k\alpha)}{dz} = 0 \quad (37)$$

et

$$\frac{d^2 F}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(z) [1 - \alpha^2(z)] F = 0 \quad (38)$$

Il résulte de (37) que

$$\frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(z)} \sin \varphi(z) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon(o)} \sin \varphi_0 \quad (\text{loi de réfraction}) \quad (39)$$

φ_0 étant l'angle d'incidence à la base de la couche (intersurface). Nous admettrons que l'on a sur l'intersurface $\mu(0) = 1$. L'identification de l'angle φ avec l'angle formé par la normale au plan d'onde et la normale à l'intersurface est évidente.

Pour transformer l'équation (1) en l'équation (1') il suffit d'effectuer la substitution :

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(z) \rightarrow \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon(z) [1 - \alpha^2(z)] \quad (40)$$

Il est évident que l'utilisation de l'équation (1) nous permet d'écrire immédiatement la solution à l'approximation de l'optique géométrique : à l'aide des relations (1), (8), (9), (34), (38).

Nous obtenons :

$$E_y = \frac{E_{y0}}{\sqrt[4]{\varepsilon(z) - \varepsilon(o) \alpha_0^2}} e^{\pm i \frac{\omega}{c} \left(\int_0^z \sqrt{\varepsilon(z) - \varepsilon(o) \alpha_0^2} dz + \alpha_0 \sqrt{\varepsilon(o)} x \right)} \quad (41)$$

La réflexion de l'onde se produisant au voisinage du point z_0 où

$$\mu(z_0) = \mu(o) \sin \varphi_0.$$

Nous voyons ainsi que l'égalité précédente nous donne la condition de réflexion totale qui a lieu pour :

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Dans un milieu isotrope homogène la direction du rayon qui est en même temps la direction du flux d'énergie coïncide avec la direction de la normale à la surface d'onde; dans le cas d'un gradient d'ionisation verticale, c'est-à-dire ne dépendant que de z on peut considérer le milieu ionisé comme constitué par une stratification de couches infiniment minces, chacune d'elles se comportant comme un milieu homogène, caractérisé par une constante diélectrique particulière ε .

La direction de la normale s'obtient immédiatement à partir de (41) et nous obtenons pour composantes du vecteur d'onde $\vec{k}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_x = \frac{\omega}{c} \mu(o) \sin \varphi_0 = \frac{\omega}{c} \mu(z) \sin \varphi, \quad k_y = 0 \\ k_z = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu^2(z) - \mu^2(o) \sin^2 \varphi_0} = \frac{\omega}{c} \mu(z) \cos \varphi \\ k^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mu^2(z). \end{array} \right. \quad (42)$$

Le vecteur unitaire de la normale au plan d'onde est égal à $\frac{\vec{k}}{k}$. Ce vecteur coïncide avec la direction de la tangente à la trajectoire du rayon. L'approximation de l'optique géométrique n'est plus valable au voisinage de point de réflexion, en ce point la direction de l'impulsion ne coïncide plus avec la normale au plan d'onde.

Nous avons enfin pour expression de la variation de phase, en vertu de la relation (30) que l'on étend sans difficulté à la propagation à incidence oblique :

$$\psi = 2 \int_0^{x_0} k_z dz + k_x(x_1 - x_0) - \frac{\pi}{2} \quad (43)$$

x_0 et x_1 désignant les abscisses des points de départ et d'arrivée de l'onde pour lesquels on détermine la différence de phase.

D'une façon générale dans le domaine d'application de l'optique géométrique la variation de phase sur un trajet est égale à :

$$\psi = \frac{\omega}{c} \int \mu ds = \int \vec{k} \cdot d\vec{s} \quad (44)$$

où ds est l'élément de la trajectoire du rayon. La direction de ce dernier est confondue avec celle du vecteur $\vec{k}$. Nous reviendrons sur ces résultats (Ch. III) en utilisant la méthode de l'ikonale.

La trajectoire d'une onde électromagnétique a donc pour équation différentielle :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{k_x}{k_z} = \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{\mu^2(z) - \sin^2 \varphi_0}} \quad (45)$$

et par suite :

$$x = x_0 + \int_0^z \frac{\sin \varphi_0 dz}{\sqrt{\mu^2(z) - \sin^2 \varphi_0}} \quad (46)$$

x_0 étant l'abscisse du point où l'onde pénètre dans la couche.

D) Trajectoire d'un groupe d'ondes.

Considérons un faisceau étroit de rayons se dirigeant vers l'ionosphère et partant d'un point A ($x_0, 0, 0$) situé au sol. Ce faisceau constitue un « paquet d'ondes » de vecteur d'onde $\vec{k}$ voisin d'un certain vecteur $\vec{k}_0$ (« porteur ») ; nous supposons que le rayonnement est monochromatique et de pulsation ω .

Le champ du signal incident peut être représenté sous la forme :

$$E_1 = \int g(\vec{k}) e^{i(\omega t - k_x x_0)} d\vec{k} \quad (48)$$

où $\vec{k}$ possède un maximum pour $\vec{k}_0$.

Le champ du signal réfléchi en un point B de coordonnées ($x, 0, 0$) aura pour expression :

$$E_2 = \int g(\vec{k}) e^{i[\omega t - k_x x_0 - \psi(k, x_0, x)]} d\vec{k} \quad (48)$$

où ψ désigne la différence de phase.

Si nous développons la phase ψ en série suivant $\Delta\vec{k} = \vec{k} - \vec{k}_0$ nous obtenons:

$$\psi = \psi(\vec{k}_0) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial \vec{k}} \right)_{\vec{k}_0} \Delta \vec{k} + \dots \quad (49)$$

Si $\frac{\partial \psi}{\partial \vec{k}}$ est nul, le champ E_2 est de la forme $e^{-i\psi(\vec{k}_0)} E_1$ au second ordre près, et l'intensité du champ du signal réfléchi est la même que celle du signal incident. La position du point x_1 est par conséquent déterminée à partir de la condition :

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \vec{k}} \right)_{\vec{k}_0, z=0} = 0$$

Or, à l'approximation de l'optique géométrique l'expression de la différence de phase relative au trajet de l'onde nous est donnée par la relation (43) en tenant compte des expressions (42) nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi}{\partial k_x} = \frac{1}{\frac{\omega}{c} \mu(o)} \frac{\partial \psi}{\partial (\sin \varphi_0)} = x_1 - x_0 - 2 \int_0^{z_m} \frac{\mu(o) \sin \varphi_0 dz}{\sqrt{\mu^2(z) - \mu^2(o) \sin^2 \varphi_0}} = 0 \\ \frac{\partial \psi}{\partial k_z} = \frac{1}{\frac{\omega}{c} \mu(o)} \frac{\partial \psi}{\partial (\cos \varphi_0)} = -\cotg \varphi_0 (x_1 - x_0) + 2 \int_0^{z_m} \frac{\mu(o) \cos \varphi_0 dz}{\sqrt{\mu^2(z) - \mu^2(o) \sin^2 \varphi_0}} = 0 \end{array} \right.$$

(avec $\mu(o) = 1$).

Les deux relations $\frac{\partial \psi}{\partial k_x} = 0$, $\frac{\partial \psi}{\partial k_z} = 0$ sont équivalentes, nous en déduisons :

$$x_1 - x_0 = 2 \int_0^{z_m} \frac{\sin \varphi_0 dz}{\sqrt{\mu^2(z) - \sin^2 \varphi_0}} \quad (\mu(o) = 1) \quad (50)$$

Si au lieu d'un parcours complet du « paquet d'ondes » nous considérons un parcours égal à δs nous aurons pour expression de la variation de phase correspondante :

$$\delta \psi = i \frac{\omega}{c} [\delta x \sin \varphi_0 + (z' \sin \varphi_0) \delta z] \quad (51)$$

où nous avons tenu compte de l'égalité évidente :

$$z' \sin \varphi_0 = \sqrt{\mu^2 - \sin^2 \varphi_0} \quad (52)$$

D'après ce qui précède nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial (\delta \psi)}{\partial \sin \varphi_0} = \delta x + \frac{\partial (z' \sin \varphi_0)}{\partial \sin \varphi_0} \delta z = 0. \quad (53)$$

Or :

$$\frac{\partial (z' \sin \varphi_0)}{\partial \sin \varphi_0} = \frac{1}{\cos \varphi_0} \frac{\partial (z' \sin \varphi_0)}{\partial \varphi_0} \quad (54)$$

et nous obtenons pour équation différentielle de la trajectoire du « paquet d'ondes » :

$$\frac{\delta x}{\delta z} = - \frac{1}{\cos \varphi_0} \frac{\partial (z' \sin \varphi_0)}{\partial \varphi_0} = \frac{\pm \sin \varphi_0}{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 \varphi_0}} \quad (55)$$

Nous voyons ainsi que la trajectoire de phase (enveloppe des normales d'onde) et la trajectoire du « paquet d'ondes » sont confondues.

E) Milieu inhomogène transparent (Cas général).

Nous allons considérer maintenant un milieu ionisé dont l'indice varie continuellement en chaque point de l'espace, μ est alors fonction des trois coordonnées x, y, z .

Le problème peut être traité soit à partir du principe de FERMAT :

$$\delta \int \mu ds = 0 \quad (56)$$

soit à l'aide de l'équation de JACOBI (Ikonalé).

En coordonnées rectangulaires, nous obtenons à partir de l'expression (56) :

$$\delta \int \mu ds = \Sigma \int \left(ds \frac{\partial \mu}{\partial x} \delta x + \mu \frac{dx}{ds} \delta dx \right) = 0 \quad (57)$$

étant donné qu'aux limites $\delta x = \delta y = \delta z = 0$, nous obtenons le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{dx}{ds} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial x} \\ \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial y} \\ \frac{d}{ds} \left(\mu \frac{dz}{ds} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial z} \end{array} \right. \quad (58)$$

si nous posons :

$$\mu^2 = f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) \quad (59)$$

nous aboutissons au nouveau système :

$$\frac{dx}{\sqrt{f_1(x) + \alpha_1}} = \frac{dy}{\sqrt{f_2(y) + \alpha_2}} = \frac{dz}{\sqrt{f_3(z) + \alpha_3}} \quad (60)$$

avec la condition :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Parmi les combinaisons intégrables intéressantes se rapprochant des conditions ionosphériques observées, signalons celles de M. RAWER [10] :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu^2 = -a^2 x + b + a^2 (\rho z)^2 \\ \mu^2 = A^2 x^2 + B + A^2 (\rho z)^2 \end{array} \right. \quad (61)$$

L'intégration étant effectuée, un choix convenable des constantes permet de déterminer la correction à apporter à la fréquence maximum utilisable pour que soit assuré un parcours donné de l'onde. La méthode permet de déterminer également la valeur du déplacement latéral.

Nous pouvons formuler une hypothèse beaucoup plus générale sur la configuration des couches ionisées. Nous pouvons supposer par exemple que les couches sont *inclinaées* et *excentrées*, ce qui confirme du reste l'étude de la microstructure de l'ionosphère et les observations de Ross [11].

Ecrivons alors pour expression de l'indice de réfraction :

$$\mu^2(\rho, \theta, \varphi) = \mu_\rho^2 + \mu_\theta^2 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 \frac{f_1(\theta)}{\cos^2 \varphi} + \mu_\varphi^2 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^2 f_2(\varphi). \quad (62)$$

μ_ρ étant uniquement fonction de ρ (rayon vecteur) ; ρ, θ, φ sont évidemment trois variables indépendantes. Notons, dès maintenant qu'un milieu peut être anisotrope indépendamment de cette condition.

Ecrivons l'équation de JACOBI :

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 = \mu^2(\rho, \theta, \varphi) \quad (63)$$

dont nous allons chercher une solution écrite sous la forme :

$$\Psi(\rho, \theta, \varphi) = R(\rho) + \Theta(\theta) + \Phi(\varphi) \quad (64)$$

nous obtenons ainsi :

$$\Phi'^2 + [\Theta'^2 + \mu_0^2 \rho_0^2 f_1(\theta)] \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \mu_0^2 \rho_0^2 f_2(\varphi) = \rho^2(\mu_\rho^2 - R'^2) = \alpha_1 \quad (65)$$

expression qui nous conduit au système :

$$\begin{cases} \Theta'^2 + (\mu_0 \rho_0)^2 f_1(\theta) - \alpha_2 = 0 \\ \Phi'^2 - (\mu_0 \rho_0)^2 f_2(\varphi) + \frac{\alpha_2}{\cos^2 \varphi} - \alpha_1 = 0 \\ R'^2 = \frac{\mu_\rho^2 \rho^2 - \alpha_1}{\rho^2} \end{cases} \quad (66)$$

que l'on intègre immédiatement :

$$\psi = \int^\theta \sqrt{\alpha_2 + k f_1(\theta)} d\theta + \int^\varphi \sqrt{k f_2(\varphi) + \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\cos^2 \varphi}} d\varphi + \int^\rho \frac{\sqrt{(\mu_\rho \rho)^2 - \alpha_1}}{\rho} d\rho \quad (67)$$

où l'on a posé :

$$k = (\mu_0 \rho_0)^2$$

Nous obtenons l'équation de la trajectoire parcourue par l'onde en écrivant les relations :

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2} = 0 \quad (68)$$

ce qui nous donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_1} = \frac{1}{2} \int^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{k f_2(\varphi) + \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\cos^2 \varphi}}} - \frac{1}{2} \int^\rho \frac{d\rho}{\rho \sqrt{(\mu_\rho \rho)^2 - \alpha_1}} = 0 \\ \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_2} = \frac{1}{2} \int^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\alpha_2 + k f_1(\theta)}} - \frac{1}{2} \int^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{k f_2(\varphi) + \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{\cos^2 \varphi}}} = 0 \end{cases} \quad (69)$$

Nous pouvons choisir les conditions initiales de telle façon que :

$$\alpha_1 = \alpha_2 = (\mu_0 \rho_0)^2 \sin^2 \alpha_0 \quad (\mu_0 = 1) \quad (70)$$

α_0 étant l'angle d'incidence à la base de la couche.

Nous obtenons finalement :

$$\begin{aligned} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{f_2(\varphi) - \sin^2 \alpha_0 \operatorname{tg}^2 \varphi}} &= \int_{\rho_0}^\rho \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\left(\frac{\mu_\rho \rho}{\mu_0 \rho_0}\right)^2 - \sin^2 \alpha_0}} \\ \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \alpha_0 + f_1(\theta)}} &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{f_2(\varphi) - \sin^2 \alpha_0 \operatorname{tg}^2 \varphi}} \end{aligned} \quad (71)$$

μ_ρ est une fonction de ρ seulement, en ce qui concerne les différentes régions de l'ionosphère on peut considérer cette loi comme connue. Dans le cas d'une iono-

sphère normale, elle est du type de CHAPMAN ou du type quadratique. Nous pouvons supposer d'autre part, la déviation latérale étant de toute façon relativement faible, que les fonctions $f_1(\theta)$ et $f_2(\varphi)$ sont de la forme :

$$\begin{aligned} f_1(\theta) &= \varepsilon_1 \theta \\ f_2(\varphi) &= \varepsilon_2 \operatorname{tg} \varphi \end{aligned} \quad (72)$$

on peut supposer également si l'on n'est pas au voisinage immédiat de l'incidence normale :

$$f_2(\varphi) = \varepsilon_2 \varphi \quad (72_3)$$

L'intégration s'achève alors sans difficulté.

D'une façon générale, nous avons d'après le système (71):

$$\begin{aligned} \varphi &= F_1(\rho) \\ \theta &= F_2(\varphi) \end{aligned} \quad (73)$$

ou encore :

$$\theta = F_3(\rho).$$

Nous voyons ainsi que les mesures effectuées à moyennes et grandes distances doivent permettre de préciser les caractères généraux des variations de $F_1(\rho)$ et $F_2(\rho)$.

Dans le cas particulier (72), on peut espérer déterminer les grandeurs ε_1 et ε_2 dont les fluctuations pourraient être ainsi précisées, ainsi que les variations de longue période.

Ce problème est, au fond, analogue à celui de la scintillation des radio-sources.

Notons qu'il doit être tenu compte lors de ces calculs du déplacement latéral dû à l'action du champ magnétique terrestre (Ch. VI).

CHAPITRE III

PROPAGATION A INCIDENCE OBLIQUE DANS UN MILIEU IONISE ABSORBANT ISOTROPE

1. — Les premiers travaux sur l'optique des milieux absorbants remontent aux études sur la réflexion métallique effectuées au siècle dernier par McCULLAGH (1836) [12] et par CAUCHY (1838) [13]. Récemment le problème a été étudié par M. ARZELIES [14] [15] à propos de travaux concernant la réflexion métallique et la réflexion vitreuse.

Nous allons étudier ici la propagation dans les milieux dispersifs absorbants à partir de la méthode de l'Ikonale. Avant d'aller plus loin, il est utile de préciser ce que l'on entend par milieu ionisé isotrope absorbant.

Désignons par Σ la surface de séparation (intersurface) de deux milieux d'indices différents, ici nous supposons le premier milieu diélectrique parfait, le second milieu étant par hypothèse absorbant; à l'approximation de l'optique géométrique une onde plane décrit une trajectoire, dite *trajectoire de phase*, dont nous précisons plus loin les propriétés; deux trajectoires dont les angles d'incidences sur l'intersurface sont les mêmes, sont identiques dans le cas d'un milieu stratifié homogène, la constante diélectrique ε' possédant un gradient non nul le long de la normale à Σ . De telles trajectoires sont définies à une translation et à une rotation près. D'autre part, en deux points homologues de ces trajectoires, l'affaiblissement de l'onde est le même.

2. — Les ondes électromagnétiques les plus générales peuvent s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \Phi) - \Phi'} \\ \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \Phi) - \Phi'} \end{array} \right. \quad (1)$$

où :

$$\Phi = \frac{2\pi c}{\lambda} (\alpha x + \beta y + \gamma z); \quad \Phi' = \frac{2\pi c}{\lambda} (ux + vy + wz)$$

définissent respectivement les plans d'onde et d'absorption; les relations suivantes étant satisfaites :

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \text{ (cosinus directeurs)} \quad u^2 + v^2 + w^2 \neq 1 \text{ (paramètres directeurs).}$$

Le milieu étant isotrope, l'axe z étant dirigé suivant la normale à l'intersurface, nous pouvons écrire le champ électrique sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\frac{\omega}{c} \{ct - \mu [\alpha x + (\gamma + i\omega)z]\}} \quad (2)$$

Pour étudier la propagation de l'onde définie par (2) nous allons utiliser la méthode de l'Ikonale dont nous allons rappeler les propriétés essentielles lorsque le milieu est supposé transparent et isotrope. Nous étendrons ensuite cette méthode au cas des milieux absorbants isotropes.

Ecrivons l'équation de propagation :

$$\nabla^2 E + k^2 E = 0 \quad \left(k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon} \right) \quad (3)$$

dont nous allons chercher la solution générale écrite sous la forme :

$$E = A(x, y, z) e^{i\Phi(x, y, z)} \quad (4)$$

Portons cette expression de E dans l'équation (3), nous obtenons :

$$\nabla^2 A + i \nabla^2 \Phi + 2i \nabla A \cdot \nabla \Phi - A [(\nabla \Phi)^2 - k^2] = 0. \quad (5)$$

A l'approximation de l'optique géométrique, nous pouvons écrire :

$$(\nabla \Phi)^2 = k^2 \quad (6)$$

Si nous choisissons un vecteur unitaire $\vec{s}$ orienté suivant la direction des phases, nous pouvons écrire avec SOMMERFELD et RUNGE [16] :

$$\nabla \Phi = k \vec{s} \quad (7)$$

α, β, γ désignant les coefficients angulaires de la tangente au rayon, nous pouvons déduire de l'expression précédente :

$$\alpha = \frac{1}{k} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad \beta = \frac{1}{k} \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{1}{k} \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (8)$$

Expressions qui nous donnent après dérivation par rapport à l'arc s :

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{k} \frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{k^2} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dk}{ds} \quad (9)$$

et deux relations analogues pour $\frac{d\beta}{ds}$ et $\frac{d\gamma}{ds}$

Nous en déduisons après quelques transformations simples la nouvelle relation :

$$\frac{d\vec{s}}{ds} = \nabla \text{Log } \mu - (\nabla \text{Log } \mu \cdot \vec{s}) \vec{s} \quad (10)$$

Si nous désignons par $\vec{n}$ la normale principale à la trajectoire et par ρ le rayon de courbure, nous obtenons après avoir multiplié scalairement par $\vec{n}$ l'expression (10) et compte tenu de la relation $\frac{d\vec{s}}{ds} = \frac{\vec{n}}{\rho}$:

$$\frac{1}{\rho} = \vec{n} \cdot \nabla \text{Log } \mu. \quad (11)$$

Cette relation permet de déterminer la courbure du rayon électromagnétique lorsque sa direction et les propriétés du milieu sont connues.

La relation (7) nous donne enfin :

$$\nabla \times \nabla \Phi = \frac{\omega}{c} \nabla \times (\mu \vec{s}) = 0. \quad (12)$$

Projetant sur l'intersurface, nous avons :

$$\begin{cases} \mu s_x = \mu \sin \varphi \\ \mu s_y = \mu \cos \varphi \end{cases} \quad (13)$$

La relation (12) nous donne d'autre part :

$$\frac{\partial(\mu s_x)}{\partial z} - \frac{\partial(\mu s_z)}{\partial x} = 0.$$

C'est-à-dire, puisque μ est uniquement fonction de z :

$$\mu s_x = \mu \sin \varphi = \mu(o) \sin \varphi_0 \quad (14)$$

où φ_0 désigne l'angle d'incidence sur l'intersurface et $\mu(o)$ la valeur correspondante de l'indice. Nous obtenons ainsi la loi de DESCARTES.

Nous aurions pu considérer avec M. Louis de BROGLIE [17] un contour très aplati normal à Σ et la traversant et appliquer le théorème de STOKES.

3. — Nous allons étendre les considérations précédentes au cas où le milieu est absorbant.

$\epsilon'(z)$ désignant la constante diélectrique complexe, nous pouvons écrire à la place de (6) :

$$(\nabla \Phi)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \epsilon'(z) \quad (15)$$

où $\epsilon'(z)$ a la forme :

$$\epsilon'(z) = P(z) - i Q(z) \quad (16)$$

et au lieu de (7) :

$$\nabla \Phi = \left(\frac{\omega}{c}\right) (\mu \vec{s} - i \chi \vec{\sigma}) \quad (17)$$

où les vecteurs unitaires $\vec{s}$ et $\vec{\sigma}$ sont orientés respectivement suivant la direction des phases et suivant la direction d'extinction.

Nous obtenons à partir des expressions (15), (16) et (17) :

$$(\nabla \Phi)^2 = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [\mu^2 - \chi^2 - 2i\mu\chi \cos \theta] = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [P - iQ] \quad (18)$$

où $\cos \theta = (\vec{s} \cdot \vec{\sigma})$, θ étant l'angle formé par la direction des phases et la direction d'extinction.

Il résulte de (18) que l'on doit avoir :

$$\begin{cases} \mu^2 - \chi^2 = P \\ 2\mu\chi \cos \theta = Q. \end{cases} \quad (19)$$

Nous remarquerons que l'on peut décomposer $\nabla\Phi$ sous la forme :

$$\nabla\Phi = \nabla\Phi_1 - i\nabla\Phi_2 \quad (20)$$

et écrire la relation :

$$\nabla \times \nabla\Phi = 0 \quad (21)$$

qui nous donne :

$$\nabla \times \nabla\Phi_1 = 0 ; \quad \nabla \times \nabla\Phi_2 = 0 \quad (22)$$

ou d'après (17) :

$$\nabla \times (\vec{\mu s}) = 0, \quad (23)$$

$$\nabla \times (\vec{\chi \sigma}) = 0.$$

Nous pouvons écrire comme au paragraphe précédent :

$$\begin{cases} \mu s_x = \mu \sin \varphi \\ \mu s_z = \mu \cos \varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \chi \sigma_x = \chi \sin \alpha \\ \chi \sigma_z = \chi \cos \alpha \end{cases} \quad (24)$$

et en explicitant (23) :

$$\begin{cases} \frac{\partial(\mu s_x)}{\partial z} - \frac{\partial(\mu s_z)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial(\chi \sigma_x)}{\partial z} - \frac{\partial(\chi \sigma_z)}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

μ et χ étant fonction de z uniquement il en résulte :

$$\frac{\partial(\mu s_x)}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial(\chi \sigma_x)}{\partial z} = 0 \quad (26)$$

Par suite :

$$\begin{cases} \mu \sin \varphi = \mu(o) \sin \varphi_0 \\ \chi \sin \alpha = \chi(o) \sin \alpha_0 \end{cases} \quad (27)$$

$\mu(o), \varphi_0; \chi(o), \alpha_0$, étant les valeurs correspondantes de $\mu, \varphi; \chi, \alpha$, sur l'inter-surface; mais d'après l'hypothèse précisée au paragraphe 1, nous devons avoir sur Σ , $\chi(o) = 0$ et par suite $\alpha = 0$, et il en résulte que l'on a $\theta = \varphi$.

Nous avons finalement les relations :

$$\begin{cases} \mu^2 - \chi^2 = P \\ 2\mu\chi = \frac{Q}{\cos \varphi} \\ \mu \sin \varphi = \mu(o) \sin \varphi_0 \end{cases} \quad (28)$$

d'où nous tirons les valeurs des indices μ et χ :

$$\begin{cases} \mu^2 = \frac{1}{2} [P + \sin^2 \varphi_0 + \sqrt{(P - \sin^2 \varphi_0)^2 + Q^2}] \\ \chi^2 = \frac{1}{2} [-(P - \sin^2 \varphi_0) + \sqrt{(P - \sin^2 \varphi_0)^2 + Q^2}] \end{cases} \quad (29)$$

Remarquons enfin que si nous écrivons :

$$d\Phi = \nabla\Phi \cdot \vec{ds} \quad (30)$$

nous obtenons :

$$\Phi = \frac{\omega}{c} \int_{(z_0)}^{(z_1)} \mu ds - i \frac{\omega}{c} \int_{(z_0)}^{(z_1)} (\vec{\chi \sigma}) \cdot \vec{ds}$$

La relation précédente peut encore s'écrire :

$$\Phi = \frac{\omega}{c} \int_{(z_0)}^{(z_1)} \mu ds - i \frac{\omega}{c} \int_{(z_0)}^{(z_1)} \chi \cos \varphi ds$$

ou encore :

$$\Phi = \left(\frac{\omega}{c} \right) \int_{(z_0)}^{(z_1)} \mu ds - i \left(\frac{\omega}{c} \right) \int_{(z_0)}^{(z_1)} \chi dz \quad (31)$$

Ainsi l'absorption doit être calculée suivant la direction d'extinction, laquelle est normale à l'intersurface. On peut ainsi parler de trajectoires d'absorption. Ces trajectoires sont des droites normales à Σ .

L'intégrale

$$\Delta = \int \mu ds \quad (32)$$

définit le *trajet optique*. De même l'intégrale :

$$\vartheta = \frac{\omega}{c} \int \chi dz \quad (33)$$

définit le *décroissement d'absorption*.

Le principe de FERMAT se déduit sans difficulté de la notion de trajet optique comme dans le cas des milieux transparents [17].

4. — Nous allons étendre la méthode B.K.W. à la propagation à incidence oblique dans un milieu isotrope absorbant.

Revenons un instant au milieu transparent dont l'étude a été effectuée plus haut (Ch. II) mais en écrivant cette fois la phase sous la forme :

$$\psi = i \frac{\omega}{c} \mu (\alpha x + \gamma z) \quad (34)$$

Nous écrirons de nouveau l'équation de propagation :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon(z) \mathbf{E} = 0 \quad (\text{II}, 51)$$

et le champ $\mathbf{E}$ a pour expression :

$$\mathbf{E} = \mathbf{F}(z) e^{\pm i \frac{\omega}{c} \mu (\alpha x + \gamma z)} \quad (35)$$

Si nous portons l'expression (35) dans l'équation (II, 51) nous sommes conduits à calculer :

$$\psi'_z, \quad \psi''_{z^2}, \quad \psi'_x, \quad \psi''_{x^2}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\psi'_z = \pm i \left(\frac{\omega}{c} \right) x \frac{\partial}{\partial z} (\mu \alpha) \pm i \left(\frac{\omega}{c} \right) z \left[\gamma \frac{\partial \mu}{\partial z} + \mu \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{1}{z} \mu \gamma \right] \quad (36)$$

Nous admettons d'autre part que pour la région traversée par l'onde, nous avons toujours :

$$\frac{d\varepsilon}{dz} \lambda \ll \varepsilon \quad (\text{II}, 3)$$

ce que l'on peut encore écrire :

$$2\mu \frac{\partial \mu}{\partial z} \lambda \ll 1 \quad (37)$$

d'où il résulte que :

$$\gamma \frac{\partial \mu}{\partial z} \ll \frac{1}{2} \frac{\mu \gamma}{z} \quad (38)$$

et

$$\mu \frac{\partial \gamma}{\partial z} \ll \frac{1}{2} \frac{\mu \gamma}{z} \quad (39)$$

en dehors du voisinage immédiat du point de réflexion.

Tenant compte de la relation :

$$\mu \alpha = \mu(0) \alpha_0 = c^{te} \quad (\text{loi de réfraction}) \quad (40)$$

et du calcul des dérivées successives de ψ , nous obtenons finalement :

$$\frac{d^2 F}{dz^2} - 2i \left(\frac{\omega}{c} \right) \mu \gamma \frac{dF}{dz} - i \left(\frac{\omega}{c} \right) \frac{\partial (\mu \gamma)}{\partial z} F = 0 \quad (41)$$

après avoir utilisé la relation évidente :

$$\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \mu^2 (\alpha^2 + \gamma^2) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \epsilon$$

Suivant l'hypothèse faite plus haut au sujet de l'incidence normale (II, 10), nous admettons que :

$$|F''| \ll \frac{\omega}{c} |\mu \gamma| \left| \frac{dF}{dz} \right| \quad (42)$$

Il résulte alors de l'équation (41) que l'on peut écrire pour l'expression approchée de F :

$$F \cong \frac{c}{\sqrt{\mu \gamma}} \quad (43)$$

Enfin l'identité :

$$|\mu \gamma z|_{z_0}^z = \int_{z_0}^z |\mu \gamma| dz + \int_{z_0}^z z |d\mu \gamma| \quad (44)$$

lorsque l'inégalité : $|\mu \gamma| \gg z \left| \frac{\partial (\mu \gamma)}{\partial z} \right|$ est satisfaite, nous montre que l'on peut écrire :

$$\mu \gamma z \cong \int \mu \gamma dz$$

Et nous obtenons pour expression de la solution E dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique :

$$E = \frac{c}{\sqrt{\mu \gamma}} e^{\pm i \frac{\omega}{c} (\mu \alpha x + \int \mu \gamma dz)} \quad (45)$$

que l'on peut encore écrire :

$$E = \frac{E_0}{\sqrt[4]{\mu^2 - \mu^2(0) \sin^2 \varphi_0}} e^{\pm i \frac{\omega}{c} [x \mu(0) \sin \varphi_0 + \int_0^x \sqrt{\mu^2 - \mu^2(0) \sin^2 \varphi_0} dz]} \quad (46)$$

expression identique à l'expression (II, 41) établie précédemment.

Cette méthode s'étend sans difficulté au cas où le milieu considéré est absorbant. Dans ce cas, nous obtenons en remplaçant γ par $\gamma + iw$:

$$F'' - 2i \left(\frac{\omega}{c} \right) \mu (\gamma + iw) F' - i \left(\frac{\omega}{c} \right) F \frac{\partial}{\partial z} [\mu (\gamma + iw)] = 0 \quad (47)$$

où nous avons tenu compte de la relation :

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mu^2 [\alpha^2 + (\gamma + i\nu)^2] = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon' = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 (P - iQ) \quad (48)$$

qui, avec l'aide de (40), nous donne les relations caractéristiques du milieu absorbant isotrope (28) et nous en déduisons comme pour le cas précédent la valeur de la solution approchée :

$$E(z) = \frac{E_0}{\sqrt{\sqrt{\mu^2 - \mu^2(0) \sin^2 \varphi_0} + i\chi}} e^{\pm i \frac{\omega}{c} \left(\int_0^z \sqrt{\mu^2 - \mu^2(0) \sin^2 \varphi_0} dz + i \int_0^z \chi dz + \mu(0) x \sin \varphi_0 \right)} \quad (49)$$

5. — Remarquons que la substitution pure et simple de la valeur complexe ε' à la valeur ε réelle dans l'équation (46) nous donne pour expression de la phase :

$$\psi = \pm i \frac{\omega}{c} \left\{ \int_0^z \sqrt{\varepsilon'(z) - \varepsilon'(0) \sin^2 \varphi_0} dz + \mu(0) \sin \varphi_0 x \right\} \quad (50)$$

c'est-à-dire :

$$\psi = \pm i \frac{\omega}{c} \left\{ \int_0^z \operatorname{Re} \sqrt{P - iQ - P(0) \sin^2 \varphi_0} dz + i \int_0^z \operatorname{Im} \sqrt{P - iQ - P(0) \sin^2 \varphi_0} dz + \mu(0) \sin \varphi_0 x \right\} \quad (51)$$

La trajectoire de phase est alors déterminée à partir de la partie réelle de l'expression (51).

Nous avons alors :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\sin \varphi_0}{\operatorname{Re} \{ \sqrt{P - iQ - P(0) \sin^2 \varphi_0} \}} \quad (52)$$

avec

$$\operatorname{Re} \{ \sqrt{P - iQ - P(0) \sin^2 \varphi_0} \} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{P - \sin^2 \varphi_0 + \sqrt{(P - \sin^2 \varphi_0)^2 + Q^2}} \quad (53)$$

Nous obtenons de même pour la valeur du coefficient d'extinction :

$$\chi = \operatorname{Im} \{ \sqrt{P - iQ - P(0) \sin^2 \varphi_0} \} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{-(P - \sin^2 \varphi_0) + \sqrt{(P - \sin^2 \varphi_0)^2 + Q^2}} \quad (54)$$

Du point de vue de l'optique physique une étude rigoureuse peut être effectuée dans le cas d'une distribution linéaire de la densité électronique à partir de l'équation (II, 54) lorsque l'on substitue à $\varepsilon(z) - \varepsilon(0) \sin^2 \varphi_0$, $\varepsilon'(z) - \varepsilon'(0) \sin^2 \varphi_0$, ce qui n'offre aucune difficulté essentielle.

La détermination de la trajectoire de phase s'effectue également sans difficulté à l'aide des relations (28) et de la relation :

$$\frac{dx}{dz} = \operatorname{tg} \varphi \quad (55)$$

Nous obtenons ainsi pour équation différentielle de la trajectoire :

$$\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 = \frac{2 \sin^2 \varphi_0}{P - \sin^2 \varphi_0 + \sqrt{(P - \sin^2 \varphi_0)^2 + Q^2}} \quad (56)$$

et nous voyons qu'il n'y a pas de réflexion totale. Ce fait avait déjà été signalé par EPSTEIN [18].

Cependant dans le cas habituellement considéré, valable pour l'ionosphère, où $\omega^2 \gg v^2$ la trajectoire de phase définie par (56) diffère très peu de la trajectoire

$$\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 = \frac{\sin^2 \varphi_0}{P - \sin^2 \varphi_0} \quad (57)$$

définie en milieu transparent.

En toute rigueur, une étude du comportement de l'onde au voisinage du point défini par la condition

$$P - \sin^2 \varphi_0 = 0$$

doit être effectuée à partir de l'équation d'onde.

D'autre part, malgré les études pénétrantes de M. L. BRILLOUIN [19] et SOMMERFELD [20], il paraît difficile d'étendre la notion de vitesse de groupe, si l'on fait abstraction de la notion de vitesse complexe. Or, la méthode que nous venons d'exposer introduit une vitesse de phase réelle définie par :

$$V = \frac{c}{\mu} \quad (58)$$

où μ a pour valeur (29).

6. — Par contre la notion de trajectoire d'énergie définie à partir du vecteur de POYNTING, comme nous l'avons montré ailleurs [21], ne soulève aucune difficulté essentielle.

Si nous explicitons à l'aide des équations de MAXWELL, les relations existant entre les différentes composantes de l'onde, nous sommes conduits avec ARZELIES [22] à mettre en évidence deux types d'ondes.

1° En supposant E_x réel, une onde dont le vecteur $\vec{E}$ est à polarisation elliptique et le vecteur $\vec{H}$ à polarisation linéaire.

2° En supposant H_x réel, une onde dont le vecteur $\vec{E}$ est à polarisation linéaire et le vecteur $\vec{H}$ à polarisation elliptique.

Si l'on désigne par w la densité d'énergie localisée dans le milieu nous obtenons pour équations différentielles des trajectoires :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\bar{P}_x}{w} \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\bar{P}_y}{w} \\ \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\bar{P}_z}{w} \end{array} \right. \quad (59)$$

où $\bar{P}_x$, $\bar{P}_y$, $\bar{P}_z$ désignent les composantes du vecteur moyen de POYNTING, ici nous avons $\bar{P}_y = 0$ de sorte que les trajectoires sont planes et définies par :

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\bar{P}_x}{\bar{P}_z} \quad (60)$$

En particulier pour les ondes de type 2, la trajectoire d'énergie est confondue avec la trajectoire de phase.

Dans ce cas, nous avons en effet [21]

$$\begin{cases} E_y = E_0 e^{-\frac{\omega}{c} \mu \chi z} \cos \omega [t - \mu(x \sin \varphi + z \cos \varphi)] \\ H_x = E_0 e^{-\frac{\omega}{c} \mu \chi z} \sqrt{\mu^2 \cos^2 \varphi + \chi^2} \cos \omega [t - \mu(x \sin \varphi + z \cos \varphi) - \psi] \\ H_z = E_0 e^{-\frac{\omega}{c} \mu \chi z} \sin \varphi_0 \cos \omega [t - \mu(x \sin \varphi + z \cos \varphi)] ; \quad \operatorname{tg} \psi = -\frac{\chi}{\mu \cos \varphi} \end{cases} \quad (61)$$

ce qui nous donne pour composantes du vecteur de POYNTING

$$\begin{aligned} \overline{P}_x &= \overline{E}_y \overline{H}_x = \frac{1}{2} E_0^2 e^{-\frac{\omega}{c} \mu \chi} \mu \sin \varphi \\ \overline{P}_z &= -\overline{E}_y \overline{H}_x = -\frac{1}{2} E_0^2 e^{-\frac{\omega}{c} \mu \chi} \sqrt{\mu^2 \cos^2 \varphi + \chi^2} \cos \psi \end{aligned} \quad (62)$$

d'où d'après (60)

$$\frac{\delta x}{\delta z} = \operatorname{tg} \varphi$$

7. — Nous avons vu que l'absorption devait être calculée suivant la normale à l'intersurface, c'est-à-dire que dans le cas où il y a réflexion (retour de l'onde) : nous avons pour expression du décrement d'affaiblissement :

$$\delta = 2 \frac{\omega}{c} \int_0^{z_M} \chi dz \quad (61)$$

que l'on peut écrire :

$$\delta = \sqrt{2} \frac{\omega}{c} \int_0^{z_M} \sqrt{-(P(z) - \sin^2 \varphi_0) + \sqrt{(P - \sin^2 \varphi_0)^2 + Q^2}} dz \quad (62)$$

z_M étant la plus petite racine de $P(z) - \sin^2 \varphi_0 = 0$.

Si la relation suivante :

$$(P - \sin^2 \varphi_0)^2 \gg Q^2 \quad (63)$$

est satisfaite, il revient au même dans ce cas de calculer l'affaiblissement suivant la direction des phases en adoptant pour valeur du coefficient d'affaiblissement l'expression :

$$k = \frac{\nu}{2c} \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \quad (64)$$

Nous obtenons ainsi pour valeur du décrement à incidence normale :

$$\delta = \int k dz \quad (65)$$

et pour l'incidence oblique :

$$\delta = \int k ds = \int k \frac{dz}{\cos \varphi} \quad (66)$$

d'où l'on déduit

$$\delta_M = \cos \varphi_0 \int_0^{z_1} \frac{\nu}{2c} \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega^2 \cos^2 \varphi}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega \cos \varphi}\right)^2}} dz$$

où z_1 altitude du point de réflexion est la plus petite racine de l'équation :

$$1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega \cos \varphi} \right)^2 = 0. \quad (67)$$

Il en résulte que :

$$\delta_M = \cos \varphi_0 \delta(\omega \cos \varphi_0) \quad (\text{Théorème de MARTYN}) \quad (68)$$

Remarquons que nous pouvons écrire pour l'incidence normale le décrément d'absorption sous la forme :

$$\delta_2 \cong \frac{M}{c} \frac{1}{f^2} \int_{z_0}^{z_1} \frac{f^2(z) \nu(z) dz}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2} \frac{N(z)}{N_m}}}$$

l'indice de réfraction ayant pour expression :

$$\mu^2 = 1 - \frac{1}{x^2} \left(\frac{f_0}{f} \right)^2 = 1 - \frac{1}{x^2} \frac{N(z)}{N_m}; \quad x = \frac{f}{f_c}$$

(f_c désignant la fréquence critique, f_0 la fréquence de plasma, $M = \log_{10} e$). Cette expression nous sera utile par la suite.

8. — Il existe une autre méthode de détermination des trajectoires due à P. S. EPSTEIN [18].

L'auteur considère comme trajectoires réelles, les courbes dont la tangente coïncide avec la direction du flux maximum d'intensité.

Si l'on désigne par Φ l'Ikonale, on obtient alors pour le cas d'un milieu stratifié sphérique :

$$\text{Re} \left\{ \frac{dr}{\partial \Phi} = \frac{r^2 d\Omega}{\partial \Phi} \right\} \quad (70)$$

Cette relation permet alors de définir l'équation différentielle des trajectoires [23] :

$$r \frac{d\Omega}{dr} = \mp \text{Re} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2 \mu^2(r)}{k^2} - 1}} \right\} \quad (71)$$

et l'on a pour expression de la loi de BOUGUER généralisée :

$$r \sqrt{\text{Re} \{ \mu^2(r) \}} \sin \varphi = \mu(o) r_o \sin \varphi_o \quad (72)$$

de même l'absorption peut être calculée à partir de :

$$\text{Im} \mu \cong \frac{1}{2\omega^3} \frac{\nu \omega_0^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad (73)$$

et l'on obtient, après quelques calculs simples, le théorème de MARTYN.

La méthode d'EPSTEIN fait appel à l'étude de l'Ikonale écrite sous la forme (15) abstraction faite de la relation vectorielle (17), ce qui n'est pas légitime.

CHAPITRE 4

FREQUENCE DE COLLISIONS.
INFLUENCE DE LA STRUCTURE DES COUCHES
SUR L'ABSORPTION SELECTIVE.
DETERMINATION DU NOMBRE DE CHOCS

A) Détermination de la fréquence de collision efficace électrons-molécules neutres et électrons-ions (Méthode de GINSBURG [24]).

La relation (I,23) de DRUYVESTEYN dans le cas où $\vec{f}_1(v)$ est parallèle à $\vec{v}$ peut s'écrire :

$$f = f_0 + f_1. \quad (1)$$

Dérivons l'expression précédente par rapport au temps :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\partial f_0}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial v} \frac{dv}{dt} \quad (2)$$

Or f_0 est stationnaire, d'autre part :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{eE}{m} \quad (3)$$

et par hypothèse l'intensité du champ étant relativement faible :

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} \ll \frac{\partial f_0}{\partial v} \quad (4)$$

de sorte que :

$$\frac{df}{dt} \simeq \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial t} \quad (5)$$

Il résulte de la théorie cinétique des gaz que $\frac{df}{dt}$ est la valeur de l'intégrale des chocs calculée par rapport à f_1 (f_0 disparaissant pour des raisons de symétrie) donc d'après : (I,38) :

$$\frac{df}{dt} = -v N_\alpha f_1 \int q(v, \theta) (1 - \cos \theta) d\Omega = -v f_1 \quad (6)$$

et nous obtenons l'équation fondamentale :

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_1 = 0 \quad (7)$$

Nous avons donc le système :

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{eE}{m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + v f_1 = 0 \\ f = f_0 + f_1 \end{cases} \quad (8)$$

$$f_0 = N \left(\frac{m}{2KT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2KT}}$$

ν est le nombre de collisions qui dans le cas général est égal à $\nu_m + \nu_i$. Si le champ E est nul, nous avons :

$$f_1(v, t) = f(v, 0) e^{-\nu(v)t} \quad (9)$$

et nous voyons que la partie assymétrique de la fonction de distribution s'amortit.

Ecrivons le champ électrique variablesous la forme : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$ et cherchons une solution de f_1 :

$$f_1 = f_{10} e^{i\omega t} \quad (10)$$

Nous obtenons d'après (7) :

$$\vec{f}_1 = - \frac{e \vec{E} \frac{\partial f_0}{\partial v}}{m (i\omega + \nu[v])} \quad (11)$$

Nous avons d'autre part pour expression de la densité totale de courant :

$$\begin{aligned} \vec{j}_t &= e \int \vec{v} f d\vec{v} = \frac{4\pi e}{3} \int_0^\infty \vec{f}_1 v^3 dv \\ \vec{j}_t &= \frac{8e^2 N \vec{E}}{3 \sqrt{\pi} m} \left[\int_0^\infty \frac{\nu(u) u^4 e^{-u^2} du}{\omega^2 + \nu^2(u)} - i\omega \int_0^\infty \frac{u^4 e^{-u^2} du}{\omega^2 + \nu^2(u)} \right] \end{aligned} \quad (12)$$

où nous avons posé :

$$u = \sqrt{\frac{m}{2KT}} v \quad (13)$$

et tenu compte du fait que :

$$\frac{\partial f_0}{\partial v} = - \frac{1}{2\pi^{3/2}} \left(\frac{m}{KT} \right)^2 u e^{-u^2}. \quad (14)$$

Or, d'après (I,5) et (I,9)

$$\vec{j}_t = \left(\sigma + \frac{i\omega}{4\pi} [\epsilon - 1] \right) \vec{E} = \left[\frac{N \nu_{\text{eff.}} e^2}{m(\omega^2 + \nu_{\text{eff.}}^2)} - i\omega \frac{N e^2}{m(\omega^2 + \nu_{\text{eff.}}^2)} \right] \vec{E}. \quad (15)$$

Nous obtenons alors à partir de (12) et (15) la valeur de $\nu_{\text{eff.}}$. Or, dans l'ionosphère l'inégalité $\omega^2 \gg \nu_{\text{eff.}}^2$ est généralement satisfaite, alors nous avons :

$$\nu_{\text{eff.}} \simeq \frac{8}{3 \sqrt{\pi}} \int_0^\infty \nu(u) u^4 e^{-u^2} du \quad (16)$$

a) *Cas de collisions électrons-molécules.*

Dans ce cas la section $q_m(v, \theta)$ ne dépend qu'assez faiblement de v et θ . En particulier pour l'air avec des énergies électroniques supérieures à 0,25 eV l'effet RAMSAUER exprimant une dépendance de la section et de la vitesse est très faible.

Assimilons la molécule à une petite sphère rigide de rayon a . Nous obtenons alors à partir de (I,37) et (16) :

$$\nu_{\text{eff., m}} = \frac{4\pi}{3} a^2 N_m \bar{v} = 8,3 \cdot 10^5 \pi a^2 N_m \sqrt{T} \quad (17)$$

où $\bar{v} = \sqrt{\frac{8KT}{m}}$ est la vitesse moyenne thermique des électrons. On adopte pour valeur du rayon de la molécule la valeur $a = 1,7 \cdot 10^{-8}$ cm (GINSBURG).

Nous obtenons ainsi pour valeur de $\nu_{\text{eff.}, m}$:

$$\nu_{\text{eff.}, m} = 1,7 \cdot 10^{11} \frac{N_m}{2,7 \cdot 10^{19}} \sqrt{\frac{T}{300}} \quad (\omega^2 \gg \nu_{\text{eff.}}^2) \quad (18)$$

b) *Cas des collisions électrons-ions.*

Dans le cas des ions :

$$\nu_{\text{eff.}} = \frac{2}{3} \sqrt{\pi} \frac{e^4}{(KT)^2} N_i \bar{v} \int_0^\infty e^{-x} \text{Ln} (1 + \alpha^2 x^2) dx \quad (19)$$

où l'on a posé :

$$x = u^2 = \frac{mv^2}{2KT} \quad \alpha = \frac{2KT}{e^2} p_m \gg 1. \quad (20)$$

On obtient par un calcul approché :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x} \text{Ln} (1 + \alpha^2 x^2) dx &\simeq \int_0^\infty \frac{\alpha^2 x e^{-x}}{1 + \alpha^2 x^2} dx \\ &= - \left[Ci \left(\frac{1}{\alpha} \right) \cos \left(\frac{1}{\alpha} \right) + Si \left(\frac{1}{\alpha} \right) \sin \left(\frac{1}{\alpha} \right) - \frac{\pi}{2} \sin \left(\frac{1}{\alpha} \right) \right] \end{aligned} \quad (21)$$

Ou encore :

$$I \simeq Ci \left(\frac{1}{\alpha} \right) \simeq \text{Ln } \alpha - C$$

où $C = 0,577...$ est la constante d'EULER.

La formule (19) a été établie en adoptant l'hypothèse d'un champ central coulombien, mais le paramètre p_m (constante d'écran) est assez arbitraire.

D'après le calcul de DEBYE (I,35) on peut adopter pour la valeur p_m :

$$p_m = p_D = \sqrt{\frac{KT}{4\pi N e^2}} \quad (22)$$

et nous obtenons :

$$\nu_{\text{eff.}, i} = \pi \frac{e^4}{(KT)^2} N \bar{v} \text{Ln} \left(0,37 \frac{KT}{e^2 N^{1/3}} \right) = \frac{5,5}{T^{3/2}} \text{Ln} \left(220 \frac{T}{N^{1/3}} \right). \quad (23)$$

Nous discuterons plus loin cette expression du point de vue des mesures concernant la fréquence de collisions.

Notons que cette expression est voisine de celle obtenue par MAJUMDAR à l'aide de la Mécanique quantique [25] :

$$\nu \simeq \beta_1 \left(N \text{Ln } \beta_2 - \frac{2}{3} N \text{Ln } N \right) \quad (24)$$

où

$$\beta_1 = \frac{1,8 Z^2}{T^{3/2}} \quad \beta_2 = 1,66 \cdot 10^{27} KT \quad (25)$$

Z désigne le nombre de charges du noyau.

B) Influence de la structure de la région ionisée.

La structure des couches permet de déterminer, en général, la loi de variation de la fréquence de collisions avec l'altitude. Nous allons examiner le cas d'une région non-isotherme dont les propriétés générales ont fait l'objet des travaux de

MM. NICOLET et BOSSY [26] et de MM. RAWER, MAYOT et l'auteur [27], ainsi que le cas d'une région isotherme, ou région de CHAPMAN [28]. Nous examinerons successivement les cas de l'absorption due aux collisions électrons-molécules et de l'absorption due aux collisions électrons-ions.

I. — Absorption due aux collisions électrons-molécules neutres

1°) Cas d'une région non-isotherme.

Nous négligeons la séparation par diffusion des molécules, de telle sorte que l'atmosphère puisse être considérée comme homogène. Nous supposons d'autre part, ce qui est en accord avec les mesures les plus récentes, que la température T est fonction linéaire de l'altitude. Nous avons pour expression de la loi de variation de la pression p :

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho \quad (\rho, \text{ densité}) \quad (26)$$

(g , constante de gravité).

L'équation des gaz parfaits nous donne d'autre part :

$$p = nKT \quad (27)$$

n désignant les concentrations moléculaires, nous pouvons donc écrire :

$$\frac{dp}{p} = \frac{dn}{n} + \frac{dT}{T} = -\frac{dz}{H} \quad (28)$$

$$H = \frac{KT}{mg} \text{ est l'échelle des hauteurs}$$

Le gradient de température étant une fonction de l'altitude :

$$\frac{dT}{T} = \frac{dH}{H}. \quad (29)$$

Or par hypothèse :

$$\frac{dH}{dz} = \beta. \quad (30)$$

Nous avons par suite les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp}{p} = \frac{dn}{n} + \frac{dT}{T} = -\frac{1}{\beta} \frac{dH}{H}, \\ \frac{dn}{n} = -\frac{dH}{H} - \frac{1}{\beta} \frac{dH}{H} = -\frac{1+\beta}{\beta} \frac{dH}{H} \end{array} \right. \quad (31)$$

D'où :

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{H}{H_0} \right)^{-\frac{1}{\beta}} \quad \frac{n}{n_0} = \left(\frac{H}{H_0} \right)^{-\frac{1+\beta}{\beta}}. \quad (32)$$

Si nous désignons par Q_ν le flux quantique du rayonnement ionisant ultra-violet supposé monochromatique de fréquence ν , σ_ν la section efficace de photoionisation. Nous avons, $\tilde{\omega}_\nu$ désignant la production ionique :

$$\tilde{\omega}_\nu = n \sigma_\nu Q_\nu \quad (33)$$

et ds l'élément de longueur du rayon ionisant :

$$dQ_\nu = -\tilde{\omega}_\nu ds \quad (34)$$

avec $ds = -\frac{dz}{\cos \chi}$ (χ distance zénithale solaire).

D'où :

$$Q_\nu(z) = Q_\infty \exp \left[-\sigma_\nu \sec \chi \int_z^{z_1} n(z) dz \right] \quad (35)$$

Dans le cas d'une variation linéaire de température :

$$\begin{cases} T = T_0 (1 + bz) \\ H = H_0 (1 + bz) \\ n = n_0 (1 + bz)^{-\frac{1}{bH_0} - 1} \end{cases} \quad (36)$$

avec $b H_0 = \beta$.

La recombinaison étant supposée directe, nous avons pour l'état d'équilibre :

$$\frac{dN}{dt} = \tilde{\omega} - \alpha N^2 \simeq 0 \quad (37)$$

(α , coefficient de recombinaison, N densité électronique). D'où :

$$N = \left[\frac{\sigma Q_\infty}{\alpha(z)} n(z)^{1/2} \exp \right] \left\{ -\frac{\sigma_\nu}{2} \sec \chi \int_z^{z_1} n(z) dz \right\} \quad (38)$$

Nous pouvons prendre comme limites d'intégration (z ; ∞) d'où d'après (36) :

$$\int_z^\infty n dz = \frac{n_0}{\beta} \int_z^\infty \left(\frac{H}{H_0} \right)^{-\frac{1+\beta}{\beta}} dH = nH \quad (39)$$

par conséquent :

$$N = \left(\frac{\sigma Q_1}{\alpha(z)} n(z) \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\sigma_\nu}{2} \sec \chi \cdot nH \right\} \quad (40)$$

Supposons α constant ($\alpha = \alpha_0$) alors :

$$N = \left(\frac{\sigma_\nu Q_\infty n_0}{\alpha_0} \right)^{\frac{1}{2}} (1 + bz)^{-\frac{1}{2bH_0} - 1} \exp \left\{ -\frac{\sigma_\nu}{2} \sec \chi \cdot n_0 H_0 (1 + bz)^{-\frac{1}{bH_0}} \right\} \quad (41)$$

Variations de la fréquence de collisions électrons-molécules neutres.

La théorie cinétique nous a conduit à l'expression :

$$\nu_{e,m} = \kappa N_m \sqrt{\frac{T}{300}} \quad (42)$$

L'indice (e, m) précisant qu'il s'agit de chocs entre électrons et molécules neutres, ν_0 étant le nombre de chocs correspondant à la température T_0 , nous obtenons la relation :

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \sqrt{\frac{T}{T_0} \frac{n}{n_0}} \quad (43)$$

a) Dans le cas d'une région isotherme :

$$\begin{aligned} T &= T_0 ; & N &= N_0 e^{-\int_0^z \frac{dz}{H}} \\ \frac{\nu}{\nu_0} &= e^{-\frac{z}{H}} \end{aligned} \quad (44)$$

b) Dans le cas d'une région non-isotherme, compte-tenu des hypothèses précédentes (36) :

$$\frac{\nu}{\nu_0} = (1 + bz)^{-\frac{1}{bH_0} - \frac{1}{2}} \quad (45)$$

Calcul du décrement d'affaiblissement.

Compte-tenu de (III, 69) nous avons pour expression du décrement :

$$\delta_2 = \frac{\nu_0}{2c} \frac{N_0}{N_m} \eta^2 \int \frac{(1+bz)^{-\frac{3}{2}\gamma-1} e^{-K(1+bz)^{-\gamma}} dz}{\sqrt{1-\eta'^2(1+bz)^{-\frac{\gamma}{2}-1} e^{-K(1+bz)^{-\gamma}}}} \quad (46)$$

avec les notations suivantes :

N_m densité électronique au maximum de la couche.

$$N_0 = \frac{\sigma_\nu Q_\infty n_0}{\alpha}$$

$$n = \frac{f_c}{f}; \quad \eta' = \eta \frac{N_0}{N_m} \quad K = \frac{\sigma}{2} \sec \chi \cdot n_0 H_0 \quad \frac{1}{b H_0} = \gamma$$

Effectuons le changement de variable :

$$x = K(1+bz)^{-\gamma}$$

Nous obtenons pour nouvelle expression de l'intégrale :

$$\delta_2 = -\frac{1}{b\gamma} K^{-\frac{3}{2}} \int \frac{\sqrt{x} e^{-x} dx}{\sqrt{1-\eta'^2 K^{-\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{2}} x^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}} e^{-x}}} \quad (47)$$

Dans le cas où l'on admet pour le coefficient de recombinaison une loi de variation de la forme :

$$\alpha = \alpha_0 \left(\frac{n}{n_0} \right)^m \quad (48)$$

nous sommes conduits à une intégrale de même forme générale :

$$I = \int \frac{x^h e^{-x} dx}{\sqrt{1-g x^k e^{-x}}} \quad (49)$$

Calcul de l'intégrale :

Dans le cas de la traversée ($\eta < 1$) les limites sont 0 et ∞ ; dans le cas de la réflexion : x_1 et ∞ ; x_1 désignant la plus grande racine de l'équation transcendante :

$$1 - g x^k e^{-x} = 0. \quad (50)$$

Développant l'expression précédente, nous obtenons :

$$I = \int x^h e^{-x} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} \frac{g^n}{(n+1)^{nk+h+1}} \int X^{nk+h} e^{-X} dX \quad (51)$$

où l'on a posé :

$$X = (n+1)x$$

Dans le cas de la traversée :

$$\int_0^{\infty} X^{nk+h} e^{-X} dX = \Gamma(nk+h+1) \quad (52)$$

Dans le cas de la réflexion :

$$\int_{(n+1)x_1}^{\infty} X^{nk+h} e^{-X} dX = Q[(n+1)x_1, nk+h+1] \quad (53)$$

$Q(x, p)$ désignant la fonction de PRYM :

$$Q(x, p) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{p-1} dt$$

Nous avons supposé jusqu'ici que la couche était infiniment étendue, en réalité nous devons admettre l'existence, imposée par les données expérimentales, de deux limites finies a et b pour la variation de x ; et α_n et β_n définies par :

$$\alpha_n = (n+1)a \quad \beta_n = (n+1)b$$

pour la variation de X . Les intégrales pourront être exprimées dans ce cas à l'aide des fonctions de WHITTAKER ou comme différence de fonction de PRYM.

Dans tous les cas le radical :

$$R = \frac{1}{\sqrt{1 - g e^{-x} x^k}}$$

peut être développé en série, puisque $|g e^{-x} x^k| \leq 1$, et l'on intègre terme à terme la série ainsi obtenue.

Notons que la variation de l'expression :

$$G = 1 - g e^{-x} x^k$$

en fonction du paramètre g (fig. 1), présente l'allure suivante

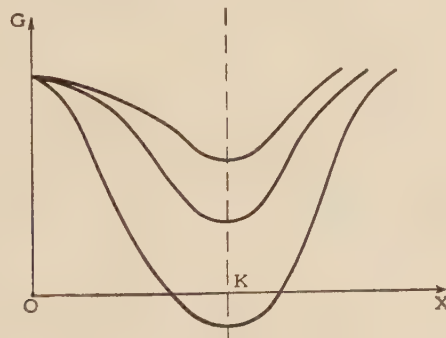


FIG. 1

Le minimum a lieu pour :

$$\frac{dG}{dx} = 0$$

soit :

$$x = k = \frac{\gamma + 1}{2\gamma}$$

quel que soit g .

Nous avons à calculer les intégrales :

$$J_p(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} X^{p-1} e^{-X} dX \quad (54)$$

et l'on peut poser :

$$\alpha = (n+1)a \quad \beta = (n+1)b \quad p = nk + h + 1$$

$$J_p(\alpha, \beta) = Q_p(\alpha) - Q_p(\beta)$$

$Q_p(x)$ désignant la fonction de PRYM.

Les tables de PEARSON peuvent être utilisées. Cependant il est plus commode d'effectuer le calcul direct.

On peut procéder ainsi :

a) pour y faible devant p :

$$Q_p(y) = \Gamma(p) - \frac{1}{p} e^{-y} y^p A(y) \quad (55)$$

$A(y)$ désignant la série convergente :

$$A(y) = 1 + \frac{y}{p+1} + \frac{y^2}{(p+1)(p+2)} + \dots + \frac{y^n}{(p+1) \dots (p+n)}$$

et $\Gamma(p)$ la fonction d'EULER.

b) pour y grand devant p :

$$Q_p(y) = y^{p-1} e^{-y} B(y) \quad (56)$$

$B(y)$ désigne le développement asymptotique :

$$B(y) = 1 + \frac{p-1}{y} + \frac{(p-1)(p-2)}{y^2} + \dots + \frac{(p-1) \dots (p-n)}{y^n} + \dots$$

On peut utiliser également la relation de récurrence :

$$Q_{p+1}(y) = y^p e^{-y} p Q_{p-1}(y).$$

2° Cas d'une région isotherme.

Dans le cas où la région traversée par l'onde est isotherme, nous pouvons utiliser pour la variation de la fréquence de collisions la relation (44) et supposer que la loi de variation de la densité électronique est du type quadratique, ce qui d'une part est une bonne approximation de la formule générale de CHAPMAN et ce qui d'autre part se trouve sensiblement vérifié dans le cas d'une région ionosphérique normale.

Nous désignerons par ξ l'altitude calculée à partir du maximum d'ionisation et par ξ_m la demi-épaisseur de la couche, nous avons pour expression la loi de variation de l'indice en fonction de l'altitude :

$$\mu^2 = 1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_m}\right)^2\right] \quad (57)$$

et pour loi de variation du nombre de chocs (44) :

$$\nu = \nu_m e^{-\frac{\xi}{H}} \quad (58)$$

d'où l'expression du décrément :

$$\delta_2 = \frac{\nu_m}{2c} \int_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{e^{-\frac{\xi}{H}} \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_m}\right)^2\right] d\xi}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_m}\right)^2\right]}} \quad (59)$$

Pour la commodité des calculs nous poserons :

$$\frac{f_c}{f} = \eta$$

a) *Cas de la réflexion :*

Dans ce cas :

$$\eta > 1$$

Effectuons alors le changement de variable :

$$-\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2 - 1}} \frac{\xi}{\xi_m} = ch \theta$$

nous obtenons :

$$\delta_2 = \frac{\nu_m}{4 c \eta} \xi_m [(1 + \eta^2) \Phi_0(\eta) - (\eta^2 - 1) \Phi_1(\eta)] \quad (60)$$

où :

$$\Phi_0(\eta) = \int_0^{\text{Ln} \sqrt{\frac{1+\eta}{-1+\eta}}} e^{u c h \theta} d\theta$$

$$u = \frac{\xi_m}{H} \frac{\sqrt{\eta^2 - 1}}{\eta} \quad (61)$$

$$\Phi_1(\eta) = \int_0^{\text{Ln} \sqrt{\frac{1+\eta}{-1+\eta}}} e^{u c h \theta} ch 2 \theta d\theta$$

Nous pouvons développer les fonctions Φ_0 et Φ_1 à l'aide des fonctions modifiées de BESSEL.

Nous obtenons alors les intégrales (61) ayant été calculées entre les limites 0 et θ :

$$\Phi_0(\theta) = I_0(u) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(u) \frac{sh n \theta}{n}$$

$$\Phi_1(\theta) = I_0(u) \frac{sh 2 \theta}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n I_n(u) \left[\frac{sh(n+2) \theta}{n+2} + \frac{sh(n-2) \theta}{n-2} \right] \quad (62)$$

b) *Cas de la traversée :* ($\eta < 1$) nous obtenons :

$$\delta_2 = \frac{\nu_m}{4 c \eta} \xi_m [(1 + \eta^2) \Psi_0(\eta) - (1 - \eta^2) \Psi_1(\eta)] \quad (63)$$

Les fonctions $\Psi_0(\theta)$ et $\Psi_1(\theta)$ étant définies par les développements :

$$\Psi_0(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\varepsilon_{2n} J_{2n}(\tilde{\omega}) \frac{sh 2n \theta}{2n} - \varepsilon_{2n+1} J_{2n+1}(\tilde{\omega}) \frac{ch(2n+1) \theta}{2n+1} \right]$$

$$\Psi_1(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \varepsilon_{2n} J_{2n}(\tilde{\omega}) \left[\frac{sh(n+2) \theta}{n+2} + \frac{sh(n-2) \theta}{n-2} \right] \right. \quad (64)$$

$$\left. - \varepsilon_{2n+1} J_{2n+1}(\tilde{\omega}) \left[\frac{ch(2n+3) \theta}{2n+3} + \frac{ch(2n-1) \theta}{2n-1} \right] \right\}$$

($\varepsilon_n = 2$ pour $n = 1, 2, 3 \dots$; $\varepsilon_0 = 1$).

Nous avons représenté les différentes lois de variations de δ_2 fig. 2.

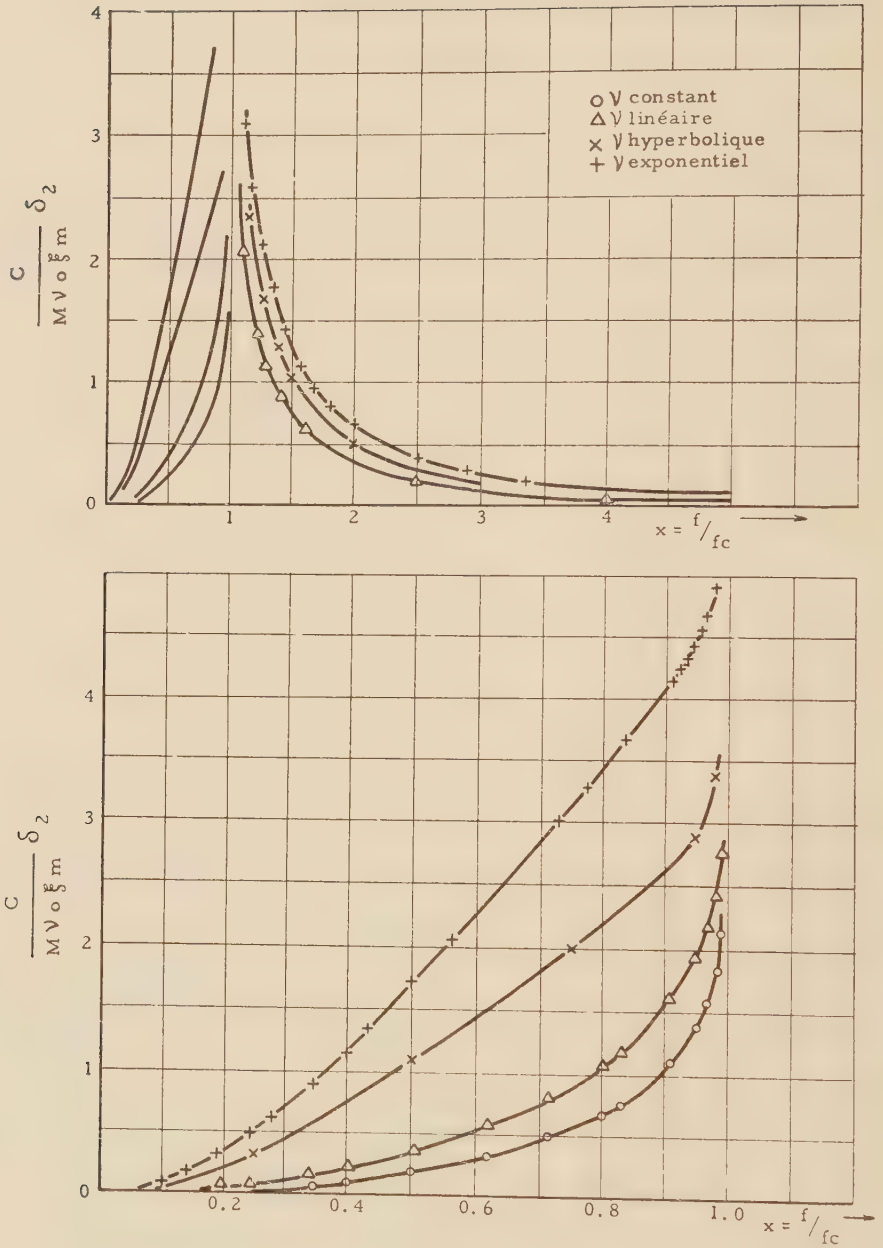


FIG. 2

II. — Absorption due aux collisions électrons-ions

Cas d'une région de CHAPMAN. Utilisation d'une formule approchée.

Le cas d'une région de CHAPMAN ne soulève aucune difficulté essentielle, mais les calculs conduisent à l'évaluation numérique d'une série très lentement convergente. On a intérêt dans ce cas à utiliser une formule approchée. La fonction :

$$N = N_m \cos^2 \frac{\pi z}{4\rho} \quad (65)$$

où ρ représente l'altitude du point d'inflexion nous donne une très bonne approximation (fig. 3).

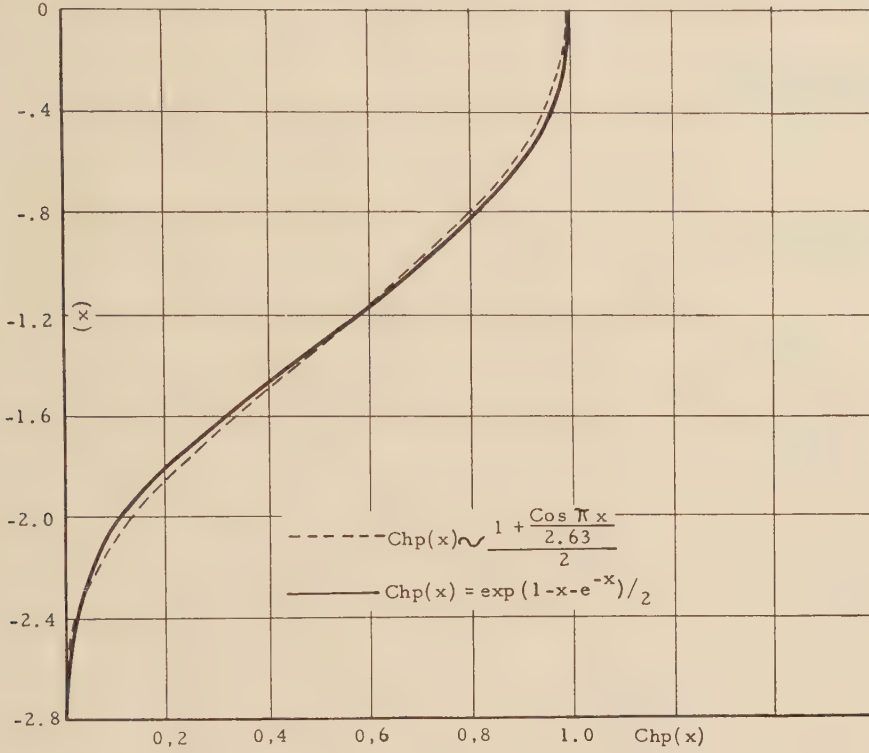


FIG. 3

Nous utiliserons pour loi de variation de v l'expression approchée :

$$v \cong \frac{\pi Z^2 e^4 N}{\sqrt{m} (KT)^{3/2}}. \quad (66)$$

Si nous posons :

$$\gamma X = \frac{N}{N_m} \quad \text{avec} \quad \gamma = \left(\frac{f}{f_c} \right)^2$$

nous obtenons pour expression du décrement :

$$\delta_2 = -\frac{v_m}{c} \frac{\rho}{\pi} \gamma \int \frac{X^2 dX}{\sqrt{X(1-X) \left(\frac{1}{\gamma} - X \right)}}$$

$$v_m = \frac{\pi Z^2 e^4 N_m}{\sqrt{m} (KT)^{3/2}}$$

a) Dans le cas de la réflexion les limites étant 0 et 1 ($\gamma < 1$) :

$$I = \int_0^1 \frac{X^2 dX}{\sqrt{X(1-X) \left(\frac{1}{\gamma} - X \right)}}$$

Posons :

$$\sin \varphi = \sqrt{X}$$

Nous obtenons :

$$\partial_2 = -\frac{2\nu_m}{3c} \frac{\rho}{\pi} \frac{f}{f_c} \varphi \left(\frac{f}{f_c} \right) \quad (67)$$

$\varphi \left(\frac{f}{f_c} \right)$ ayant pour expression :

$$\varphi \left(\frac{f}{f_c} \right) = 2 \left[\left(\frac{f_c}{f} \right)^2 + 1 \right] (K - E) - K$$

où K et E désignent les intégrales de LEGENDRE.

b) Dans le cas de la traversée nous avons $\gamma > 1$ d'où :

$$J = \int_0^{\frac{1}{\gamma}} \frac{X^2 dX}{\sqrt{X(1-X) \left(\frac{1}{\gamma} - X \right)}}$$

Effectuons le changement de variable $x = \sqrt{\gamma X}$ nous obtenons :

$$J = \frac{2}{\gamma^2} \int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}} \quad \left(\frac{1}{\gamma} = k^2 \right)$$

et le nouveau changement de variable

$$x = \sin \varphi$$

nous conduit à l'expression (67) où l'on a cette fois $\varphi \left(\frac{f_c}{f} \right)$ au lieu de $\varphi \left(\frac{f}{f_c} \right)$

C) Détermination de la fréquence de collisions.

Dans la couche E où la concentration ionique est sensiblement égale à la concentration moléculaire les collisions électrons-molécules sont déterminantes. Nous avons évidemment la relation :

$$\nu_{\text{eff.}} = \nu_{\text{eff.,m}} + \nu_{\text{eff.,i}} = 8 \cdot 10^5 \pi a^2 \sqrt{T} N_m + \frac{5,5 N}{T^{3/2}} \text{Ln} \left(220 \frac{T}{N^{1/3}} \right) \quad (68)$$

avec

$$\nu_{\text{eff.,i}} \ll \nu_{\text{eff.}}$$

Les déterminations de $\nu_{\text{eff.,m}}$ pour la région E obtenues à partir des mesures concernant l'effet Luxembourg [29] donnent sensiblement :

$$\bar{\nu} \simeq 8 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1} \quad (69)$$

et les résultats de MM. BIBL et RAWER déduits des mesures directes :

$$\bar{\nu}_m \simeq 6 \cdot 10^3 \text{ sec}^{-1} \text{ (au maximum de la couche)} \quad (70)$$

il a été tenu compte lors du dépouillement de ces mesures des valeurs du décrement d'absorption obtenues précédemment (§ A et § B).

En ce qui concerne la région F la question est plus complexe, si l'on suppose, comme cela résulte de diverses hypothèses concernant l'origine de cette région, que l'on a $N_i = N_+ = N$ avec $N \leq 2 \cdot 10^6$ on doit admettre pour que $\nu_{\text{eff}, i}$ soit prépondérant que $\nu_{\text{eff}} \sim 10^4 \text{ sec}^{-1}$ mais l'absence de mesures systématiques ne nous permet pas encore de conclure de façon définitive, il existe semble-t-il une certaine contradiction entre les mesures d'absorption de radiosources [30] et les mesures directes.

Nous avons procédé avec M. K. RAWER durant l'hiver 1949-1950 [31] [32] à des mesures systématiques concernant l'amplitude des échos ionosphériques et tenu compte de la microstructure de l'ionosphère. Cette microstructure se manifeste par la présence d'une « houle » ; cette « houle » jouant le rôle de miroir est à l'origine des phénomènes de focalisation.

Lors de l'interprétation habituelle des mesures de l'amplitude des échos on admet généralement que la région ionosphérique réfléchissante est plane (RATCLIFFE [33]). Il suffit alors, en principe, de connaître l'amplitude de deux échos successifs pour déterminer la valeur du coefficient apparent de réflexion. Cependant il est des cas fort nombreux où les amplitudes des échos successifs ne suivent pas un ordre décroissant, le deuxième écho par exemple possède une amplitude supérieure à celle du premier ; ceci nous conduit à envisager l'hypothèse de la présence d'une houle. Ce point de vue avait été admis, indépendamment des auteurs cités [32], par PIGGOTT [34]. Il a été confirmé depuis à la suite des mesures de BRAMELY [35] et de WHITEHEAD [36].

Si h désigne l'altitude de la couche ionisée, ρ le rayon de courbure, αh le déplacement du point de réflexion dû à la houle, D_1 la distance : lieu d'émission-lieu de réflexion, on obtient, la houle étant supposée cylindrique :

$$D_1 \simeq 2\alpha h \left(1 - \frac{h}{\rho}\right) \quad (71)$$

pour le premier écho ;

$$D_2 \simeq 4\alpha h \left(1 - \frac{h}{\rho}\right) \left(1 - \frac{2h}{\rho}\right) \quad (72)$$

pour le deuxième écho, etc., et l'on déduit la valeur des décrets photométriques [32]

$$\begin{cases} \delta_1^{(1)} \simeq 20 \log 2h + L_1 \\ \delta_1^{(2)} \simeq 20 \log 4h + L_1 + L_{1/2} \\ \delta_1^{(3)} \simeq 20 \log 8h + L_1 + L_{1/2} + L_{0,853} + L_{0,147} \end{cases} \quad (73)$$

avec

$$L_n = 10 \log \left| 1 - \frac{1}{n} \frac{h}{\rho} \right| \quad (74)$$

si l'on désigne enfin par P la « perte de transmission »

$$P_{(p)} = < E_0 > - < E_p >$$

nous avons :

$$P_{(p)} = \delta_1^{(p)} + p\delta_2 + (p-1)\delta_T \quad (75)$$

où δ_T désigne la perte au sol et δ_2 le décrément d'absorption. Une bonne estimation de δ_T permet alors connaissant $\langle E_0 \rangle - \langle E_p \rangle$ et $\delta_1^{(p)}$ évalués à l'aide des relations (73) de déterminer δ_2 et par suite ν ; δ_2 dépendant de la structure de la couche, ainsi que nous l'avons montré au paragraphe précédent, nous pouvons envisager chacune des hypothèses (A) et (B) et comparer ensuite avec d'autres données caractéristiques de la région ionisée considérée.

Le dépouillement des mesures effectuées à Fribourg durant les nuits d'hiver 1949-1950 nous conduit à la valeur

$$\nu_{e,m} \simeq 400 \text{ sec}^{-1} \quad (76)$$

pour le centre de la région F2. Cette valeur est nettement supérieure à celle obtenue à l'aide des fusées [37]. Ces dernières mesures donnant séparément les valeurs de la densité d et de la température T permettent une détermination de la fréquence de collisions ($\nu_{e,m}$). On obtient ainsi :

$$\nu_{e,m} \simeq 30 \text{ sec}^{-1} \text{ à } 220 \text{ km} \quad (77)$$

Si l'on adopte maintenant l'hypothèse de l'existence d'une fréquence de collisions électrons-ions nous obtenons :

$$\nu_{e,i} \simeq 1,5 \cdot 10^4 \text{ sec}^{-1} \quad (78)$$

d'où l'on déduit à l'aide de (77) pour le maximum de la couche :

$$T \simeq 100^\circ$$

valeur beaucoup plus faible que celle déduite des mesures effectuées par fusées.



FIG. 4

Nous représentons (fig. 4) les résultats obtenus par M. GHOSH à Calcutta durant la période du 26 mai au 3 juillet 1954, d'après les méthodes d'APPLETON et de CHATTERJEE [38]. Les mesures ont été effectuées durant la journée complète; nous remarquons que le maximum des valeurs de ν se situe à midi, nous voyons d'autre part que les valeurs nocturnes sont en très bon accord avec la valeur moyenne donnée par nos mesures.

Avant de conclure de façon définitive, il conviendrait de discuter l'ensemble des mesures obtenues à l'aide des fusées [37], et de comparer avec les résultats indiqués ici, ceux que l'on peut espérer obtenir dans un proche avenir à la suite des mesures effectuées à l'aide des satellites artificiels.

MILIEU ANISOTROPE

CHAPITRE 5

INFLUENCE D'UN CHAMP MAGNETIQUE EXTERIEUR CONSTANT

Pour étudier le mouvement des électrons en tenant compte de l'influence du champ magnétique, dans le cadre de la théorie élémentaire, nous devons considérer au lieu de l'équation (I,7) écrite en l'absence de champ magnétique extérieur, l'équation :

$$m\ddot{\vec{r}} + m\nu\dot{\vec{r}} = e\vec{E}_0 e^{i\omega t} + \frac{e}{mc} [\dot{\vec{r}} \times \vec{H}_{(0)}] \quad (1)$$

Nous avons d'autre part, pour expression du flux total :

$$\dot{\vec{j}}_t = \vec{j} + i\omega \vec{P} = eN\dot{\vec{r}}. \quad (2)$$

Admettons que le champ magnétique soit dirigé suivant l'axe des z , et introduisons les combinaisons

$$j_{t,x} \pm i j_{t,y} \quad (3)$$

nous obtenons :

$$j_{t,x} \pm i j_{t,y} = \frac{e^2 N (E_x \pm i E_y)}{m(i\omega + \nu \mp i\omega_H)} \quad (4)$$

où l'on a posé

$$\omega_H = \frac{|e| H_0}{mc} \quad (\text{gyropulsation})$$

($e < 0$ dans le cas d'électrons).

D'autre part, les relations (I,12) et (A2, (4)) nous permettent d'écrire :

$$\vec{D} - i \frac{4\pi}{\omega} \vec{j} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} - i \frac{4\pi}{\omega} \vec{j} = \vec{E} - i \frac{4\pi}{\omega} \vec{j}_t \quad (6)$$

et nous pouvons former les expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(D_x - i \frac{4\pi}{\omega} j_x \right) \pm i \left(D_y - i \frac{4\pi}{\omega} j_y \right) = \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 \mp \omega \omega_H - i \omega \nu} \right) (E_x \pm i E_y) \\ D_z - i \frac{4\pi}{\omega} j_z = \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - i \nu \omega} \right) E_z \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left(\omega_0^2 = 4\pi \frac{N e^2}{m} \right)$$

D'une manière générale nous avons [24] :

$$\left\{ \begin{array}{l} j_{t,i} = i \omega P_i + j_i = \sum_{k=1}^3 \left(i \omega \frac{\varepsilon_{ik} - \delta_{ik}}{4\pi} + \sigma_{ik} \right) E_k \\ D_i - i \frac{4\pi}{\omega} j_i = \sum_{k=1}^3 \left(\varepsilon_{ik} - i \frac{4\pi}{\omega} \sigma_{ik} \right) E_k \equiv \sum_{k=1}^3 \varepsilon'_{ik} E_k \end{array} \right. \quad (8)$$

où δ_{ik} désigne le symbole de KRONECKER ($\delta_{ik} = 1$ si $i = k$, $\delta_{ik} = 0$ si $i \neq k$).

Nous pourrions ainsi obtenir à l'aide des expressions précédentes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon'_{11} + i \varepsilon'_{21} \equiv \varepsilon'_{xx} \pm i \varepsilon'_{yx} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 \mp \omega \omega_H - i \omega \nu} \\ \varepsilon'_{12} \pm i \varepsilon'_{22} \equiv \varepsilon'_{xy} \pm i \varepsilon'_{yy} = \pm i \left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 \mp \omega \omega_H - i \omega \nu} \right] \\ \varepsilon'_{33} = \varepsilon'_{zz} = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 - i \nu \omega} \end{array} \right. \quad (9)$$

Les autres composantes ε'_{ij} étant nulles. En l'absence d'absorption ($\nu = 0$), nous remarquons que ε'_{ij} conserve des composantes complexes.

Si nous admettons que l'orientation du vecteur $\vec{H}_{(0)}$ est quelconque et non plus confondue avec la direction Oz nous devons effectuer un changement d'axes x_l , et nous obtenons pour nouvelle expression du tenseur ε'_{ik} , la transformation (x'_l, x_l) étant orthogonale :

$$\varepsilon'_{ik}(x_l) = \sum_{m,n=1}^3 \gamma_{im} \gamma_{kn} \varepsilon'_{mn}(x'_l) \quad (10)$$

Si nous choisissons maintenant les axes de telle façon que $\vec{H}_{(0)}$ forme un angle θ avec l'axe z et un angle $\frac{\pi}{2} - \theta$ avec l'axe y , et soit, en outre, perpendiculaire à l'axe des x , nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{11} = 1 \\ \gamma_{33} = \gamma_{22} = \cos \theta \\ \gamma_{23} = -\gamma_{32} = \sin \theta \end{array} \right. \quad \gamma_{12} = \gamma_{13} = \gamma_{21} = \gamma_{31} = 0$$

Formons alors les expressions $D_x - i \frac{4\pi}{\omega} j_x$ et $D_y - i \frac{4\pi}{\omega} j_y$, l'expression relative à la composante suivant z étant nulle (A. 1)

$$\left\{ \begin{array}{l} D_x - i \frac{4\pi}{\omega} j_x = A E_x + i C E_y \\ D_y - i \frac{4\pi}{\omega} j_y = -i C E_x + B E_y \end{array} \right. \quad (11)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \frac{(1 - iZ) Y^2 - (1 - iZ) (1 - iZ - X)^2 - XY^2 \cos^2 \theta}{(1 - iZ) Y^2 - (1 - iZ)^2 (1 - iZ - X) - XY^2 \cos^2 \theta} \\ B = \frac{Y^2 (1 - iZ - X) - (1 - iZ) (1 - iZ - X)^2}{(1 - iZ) Y^2 - (1 - iZ)^2 (1 - iZ - X) - XY^2 \cos^2 \theta} \\ C = \frac{XY (1 - iZ - X) \cos \theta}{(1 - iZ) Y^2 - (1 - iZ)^2 (1 - iZ - X) - XY^2 \cos^2 \theta} \end{array} \right. \quad (12)$$

où l'on a posé :

$$X = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad Y = \frac{\omega_H}{\omega}, \quad Z = \frac{v_{\text{eff.}}}{\omega}. \quad (13)$$

L'équation d'ondes peut alors s'écrire dans le cas général :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (A E_x + i C E_y) = 0 \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} (-i C E_x + B E_y) = 0 \end{array} \right. \quad (14)$$

où les coefficients A, B, C sont définis par (12); on obtient des simplifications évidentes pour : $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Les seuls facteurs dépendant de l'altitude z sont X, Y, Z, $\cos \theta$ et le champ magnétique $H^{(0)}$. Nous négligerons pour l'instant la variation de $H^{(0)}$ avec z .

Notons que $\theta = \frac{\pi}{2} - I$ est le complément de l'inclinaison magnétique, à incidence normale, ($\theta = \delta$) (*).

Dans un milieu homogène peuvent se propager des ondes planes que l'on écrit pour l'incidence normale :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x = E_x^{(0)} e^{\pm \frac{\omega}{c} \chi z \pm i \frac{\omega}{c} \mu z} \\ E_y = E_y^{(0)} e^{\pm \frac{\omega}{c} \chi z \pm i \frac{\omega}{c} \mu z} \end{array} \right.$$

En tenant compte de ces expressions nous obtenons à l'aide de (14) :

$$\left| \begin{array}{cc} A - (\mu - i\chi)^2 & iC \\ -iC & B - (\mu - i\chi)^2 \end{array} \right| = 0.$$

Ce qui nous donne pour expression de l'indice de réfraction :

$$= 1 - \frac{(\mu - i\chi)_{o,e}^2 = \mu_{o,e}^2 - \chi_{o,e}^2 - 2i\mu_{o,e}\chi_{o,e}}{2X(1 - X - iZ)} \\ \frac{2(1 - iZ)(1 - X - iZ) - Y^2 \sin^2 \delta \pm \sqrt{Y^4 \sin^4 \delta + 4Y^2(1 - X - iZ)^2 \cos^2 \delta}}{(15)}$$

valable pour l'incidence normale $\left(\delta = \frac{\pi}{2} - I \right)$

(*) Voir chapitre 6.

En l'absence d'absorption, nous avons ($Z = 0$) :

$$\mu_o^2 = 1 - \frac{2(\omega^2 - \omega_o^2)}{2(\omega^2 - \omega_o^2)\omega^2 - \omega_H^2\omega^2\sin^2\theta \pm \sqrt{\omega^4\omega_H^4\sin^4\theta + 4\omega^2\omega_H^2(\omega^2 - \omega_H^2)\cos^2\theta}} \quad (16)$$

valable à incidence quelconque (θ étant variable le long d'un parcours donné).

Notons qu'à incidence oblique, en l'absence d'absorption, nous avons pour expression du champ électrique de l'onde :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm i\vec{k} \cdot \vec{r}} = \vec{E}_0 e^{\pm i\frac{\omega}{c}\mu\frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{|\vec{k}|}} \quad (17)$$

et l'équation de propagation :

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{D} = 0 \quad (18)$$

nous donne :

$$\vec{k} \times \vec{k} \times \vec{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \vec{D} = 0. \quad (19)$$

Si nous adoptons pour expression du champ E, le développement (II, 3, p. 16), nous obtenons à partir de (18) :

$$\begin{cases} [\nabla\Phi \times (\nabla\Phi \times \vec{E}_{(0)})] + \vec{D}_{(0)} = 0 \\ [\nabla\Phi \times (\nabla\Phi \times \vec{E}_{(1)})] + \vec{D}_{(1)} = -i \left\{ \nabla \times (\nabla\Phi \times \vec{E}_0) + [\nabla\Phi \times (\nabla \times \vec{E}_0)] \right\} \end{cases} \quad (20)$$

etc...

La comparaison des équations (19) et (20) nous montre que :

$$\nabla\Phi = \vec{\mu} \quad (21)$$

c'est-à-dire :

$$\nabla \times \vec{\mu} = 0 \quad (22)$$

et nous sommes conduits comme précédemment (Ch. III) à la loi de réfraction :

$$\mu \sin \varphi = \mu(o) \sin \varphi_o \quad (\mu(o) = 1) \quad (23)$$

φ désignant l'angle formé par la direction de propagation (normale à l'onde) et la normale à l'intersurface (X, Y, Z sont des fonctions seulement de z).

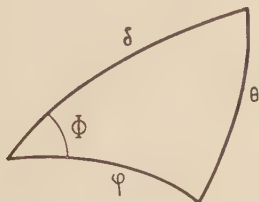
CHAPITRE 6

DETERMINATION DES TRAJECTOIRES DE L'ONDE DANS UN MILIEU ANISOTROPE TRANSPARENT

A) I. — Méthode générale

Le problème consiste d'abord à orienter l'onde dans l'espace. Nous utilisons comme plan de référence, le plan du méridien magnétique et nous situerons par rapport à ce dernier le plan d'incidence (Φ). Désignons par θ l'angle formé

par la direction des phases et la direction du champ magnétique, φ l'angle d'incidence, δ l'angle formé par la direction du champ magnétique et la verticale, nous avons la relation :



$$\cos \theta = \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta \cos \Phi \quad (1)$$

II. — Nous pouvons considérer de nouveau un « paquet d'ondes », et raisonner comme nous l'avons fait plus haut.

Le groupe d'ondes n'étant pas rigoureusement monochromatique, nous devons considérer la fonction de phase :

$$\Psi = i \frac{\omega}{c} \left(ct - x \sin \varphi_0 - \int_0^z (z' \sin \varphi_0) dz \right) \quad (2)$$

($z' = \frac{dz}{dx}$ étant relatif à la trajectoire de phase).

Les trajectoires dépendront des paramètres φ_0 , ω , Φ ce dernier caractérisant l'anisotropie, de sorte que nous pouvons écrire en vertu de ce que nous avons établi précédemment :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_0} = 0 ; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \Phi} = 0 \quad (3)$$

et le groupe d'ondes n'étant pas rigoureusement monochromatique :

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \omega} = 0. \quad (4)$$

Ce qui nous donne les trois conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi_0} = i \frac{\omega}{c} \left(x \cos \varphi_0 + \int_0^z \frac{\partial}{\partial \varphi_0} (z' \sin \varphi_0) dz \right) = 0 \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial \Phi} = i \frac{\omega}{c} \left(-y \sin \varphi_0 + \int_0^z \frac{\partial}{\partial \Phi} (z' \sin \varphi_0) dz \right) = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \omega} = \frac{i}{c} \left(h' - x \sin \varphi_0 - \int_0^z \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega z' \sin \varphi_0) dz \right) = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

Pour rétablir la relation (5₂), nous avons tenu compte du fait que lors d'une rotation infinitésimale :

$$\delta x = -y \delta \Phi \quad (6)$$

Dans la relation (5₃), nous avons posé $h' = ct$, h' désigne ainsi le parcours virtuel.

Après une seconde différentiation, nous obtenons finalement les relations :

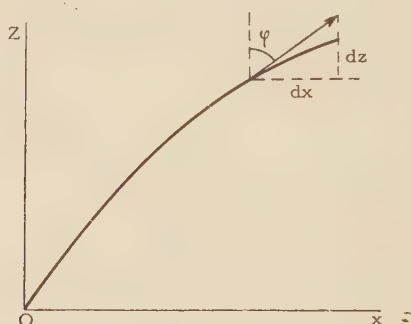
$$\begin{cases} \frac{\delta x}{\delta z} = -\frac{1}{\cos \varphi_0} \frac{\partial}{\partial \varphi_0} (z' \sin \varphi_0) \\ \frac{\delta y}{\delta z} = \frac{1}{\sin \varphi_0} \frac{\partial}{\partial \Phi} (z' \sin \varphi_0) \end{cases} \quad (7)$$

et :

$$h' = x \sin \varphi_0 + \int_0^z \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega z' \sin \varphi_0) dz. \quad (8)$$

Cette dernière relation peut s'écrire sous une forme plus concise.
Désignons par ds l'élément de longueur de la trajectoire de phase.
Nous pouvons écrire :

$$cdt = ds \sin \varphi \sin \varphi_0 + \left[z' \sin \varphi_0 + \omega \frac{\partial}{\partial \omega} (\sqrt{\mu^2 - \sin^2 \varphi_0}) \right] ds \cos \varphi$$



En remarquant que l'on a :

$$z' \sin \varphi_0 = \mu \cos \varphi; \quad \sin \varphi_0 = \mu \sin \varphi$$

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \sqrt{\mu^2 - \sin^2 \varphi_0} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \mu}{\partial \omega}$$

nous trouvons :

$$t = \frac{1}{c} \int \frac{\partial}{\partial \omega} (\mu \omega) ds \quad (ds \text{ élément relatif à la trajectoire de phase}). \quad (9)$$

Nous obtenons la même relation que pour les milieux isotropes transparents.

III. — Nous avons vu que la loi de DESCARTES était satisfaite dans le cas d'une propagation en milieu anisotrope, la stratification étant parallèle à l'*inter-surface supposée plane*.

Nous avons alors les relations :

$$\begin{cases} \mu \sin \varphi = \mu(o) \sin \varphi_0 & (\mu(o) = 1) \\ \cos \theta = \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta \cos \Phi \\ \frac{dz}{dx} = \cotg \varphi \end{cases} \quad (10)$$

qui vont nous permettre de déterminer la trajectoire de phase. Nous aurons donc pour une onde de pulsation donnée ω deux trajectoires, l'indice μ étant défini à partir de l'équation de APPLETON-HARTREE :

$$\mu_{o,e}^2 = 1 - \frac{2X(1-X)}{2(1-X) - Y^2 \sin^2 \theta \pm \sqrt{Y^4 \sin^4 \theta + 4Y^2(1-X)^2 \cos^2 \theta}} \quad (11)$$

Les expressions (10) et (11) nous conduisent à l'équation différentielle des trajectoires de phase. Nous obtenons ainsi :

$$a_0 \left(\frac{dz}{dx} \right)^4 + a_1 \left(\frac{dz}{dx} \right)^3 + a_2 \left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + a_3 \left(\frac{dz}{dx} \right) + a_4 = 0 \quad (12)$$

où les coefficients ont pour expression :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 = [(1 - Y^2) - X(1 - Y^2 \cos^2 \delta)] \sin^4 \varphi_0 \\ a_1 = 2X Y^2 \sin \delta \cos \delta \cos \Phi \sin^4 \varphi_0 \\ a_2 = -2 \sin^2 \varphi_0 \{ (\cos^2 \varphi_0 - X)(1 - X) - Y^2 \cos^2 \varphi_0 \} \\ \quad - XY^2 \sin^2 \varphi_0 (1 + \cos^2 \delta \cos^4 \varphi_0) \\ a_3 = -\frac{1}{4} \sin^2 2\varphi_0 \sin 2\delta \cos \Phi \cdot Y^2 \\ a_4 = (\cos^2 \varphi_0 - X) \{ (\cos^2 \varphi_0 - X)(1 - X) - Y^2 \cos^2 \varphi_0 \} \\ \quad - \frac{1}{4} \sin^2 2\varphi_0 \sin^2 \delta \cos^2 \Phi X Y^2. \end{array} \right. \quad (13)$$

Dans le cas général, nous poserons de façon à simplifier les calculs $U = z' \sin \varphi_0$ et nous obtenons à partir de (12) :

$$\frac{\partial U}{\partial \Phi} = \frac{\frac{\partial \alpha_0}{\partial \Phi} U^4 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \Phi} U^3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \Phi} U^2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \Phi} U + \frac{\partial \alpha_4}{\partial \Phi}}{\psi'(U)} \quad (14)$$

avec

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{\sin^4 \varphi_0}, \quad \alpha_1 = \frac{a_1}{\sin^3 \varphi_0}; \dots; \alpha_4 = a_4$$

et

$$\psi'(U) = 4\alpha_0 U^3 + 3\alpha_1 U^2 + 2\alpha_2 U + \alpha_3$$

de même

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_0} = - \frac{\frac{\partial \alpha_0}{\partial \varphi_0} U^4 + \frac{\partial \alpha_1}{\partial \varphi_0} U^3 + \frac{\partial \alpha_2}{\partial \varphi_0} U^2 + \frac{\partial \alpha_3}{\partial \varphi_0} U + \frac{\partial \alpha_4}{\partial \varphi_0}}{\psi'(U)} \quad (15)$$

Ce qui nous permet d'intégrer numériquement (RUNGE-KUTTA) dans le cas général, le système différentiel des trajectoires de groupe.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial z} = - \frac{1}{\cos \varphi_0} \frac{\partial U}{\partial \varphi_0} \\ \frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{\sin \varphi_0} \frac{\partial U}{\partial \Phi} \end{array} \right. \quad (16)$$

Deux cas particuliers peuvent être intégrés rigoureusement si l'on adopte une loi de variation de la densité électronique de la forme :

$$X = \frac{1}{\gamma} \left[2 \left(\frac{z}{z_m} \right) - \left(\frac{z}{z_m} \right)^2 \right] \quad \left(\frac{1}{\gamma} = \frac{\omega_c^2}{\omega^2} \right) \quad (17)$$

Ce sont les cas d'incidence normale et de propagation suivant l'équateur magnétique.

1°) *Cas de l'incidence normale.* — Dans le cas de l'incidence normale, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\delta x}{\delta z} &= - \left(\frac{1}{\cos \varphi_0} \frac{\partial (z' \sin \varphi_0)}{\partial \varphi_0} \right)_{\varphi_0=0} \\ \frac{\delta y}{\delta z} &= \left(\frac{1}{\sin \varphi_0} \frac{\partial (z' \sin \varphi_0)}{\partial \Phi} \right)_{\varphi_0=0} \end{aligned} \quad (18)$$

Dans ce cas particulier, nous obtenons à partir des relations précédentes :

$$\frac{\delta x}{\delta y} = \operatorname{tg} \Phi \quad (19)$$

nous voyons ainsi que la trajectoire est plane et située dans le plan du méridien magnétique.

Nous avons pour équation de la trajectoire :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{(\mu^2 - 1) Y \sin \delta}{\pm 2 \sqrt{u^2 + b^2}} \quad (20)$$

où l'on a posé :

$$b = Y \frac{\sin^2 \delta}{2 \cos \delta}; \quad u = 1 - X \quad (21)$$

que nous pouvons écrire :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{Y}{2} \sin \delta \frac{u(1-u)}{\sqrt{u^2 + b^2} (u - a \pm Y \cos \delta \sqrt{u^2 + b^2})} \quad (22)$$

puisque :

$$dz = - \frac{\gamma z_m}{2} \frac{du}{\sqrt{1 - \gamma + \gamma u}} \quad (23)$$

en posant :

$$c = \frac{1 - \gamma}{\gamma}, \quad k = Y \cos \delta, \quad (a = kb) \quad (24)$$

on aura l'équation différentielle :

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{\gamma} \frac{z_m Y \sin \delta}{4} \frac{u(1-u)}{(u - a \pm k \sqrt{u^2 + b^2}) \sqrt{(u^2 + b^2)(u + c)}}. \quad (25)$$

Nous écrivons :

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{\gamma} z_m \frac{Y \sin \delta}{4} \frac{dX}{du}. \quad (26)$$

en désignant par X l'intégrale :

$$X = \int \frac{u(1-u) du}{(u - a \pm k \sqrt{u^2 + b^2}) \sqrt{(u^2 + b^2)(u + c)}}. \quad (27)$$

Le signe + correspond au rayon *ordinaire*.

Le signe — correspond au rayon *extraordinaire*.

Les limites d'intégration (points extrêmes de la trajectoire) sont pour
— *le rayon ordinaire* :

$$\begin{array}{llll} \mu = 1 & X = 0 & u = 1 & \text{(base)} \\ \mu = 0 & X = 1 & u = 0 & \text{(réflexion)} \end{array} \quad (28)$$

— *le rayon extraordinaire* :

$$\begin{array}{llll} \mu = 1 & X = 0 & u = 1 & \text{(base)} \\ \mu = 0 & X = 1 - Y & u = Y & \text{(réflexion)} \end{array} \quad (29)$$

On doit avoir au point de réflexion :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \left(\frac{dz}{dx} \right)_0 = \operatorname{tg} \delta & (X = 1, \quad u = 0) \\ \left(\frac{dz}{dx} \right)_e = -\frac{2 + \operatorname{tg}^2 \delta}{\operatorname{tg} \delta} & (X = 1 - Y, \quad u = Y) \end{array} \right. \quad (30)$$

Ces deux relations ont été trouvées la première fois par M. COTTE [39]. Le calcul de l'intégrale auxiliaire $X(u)$ est donné en appendice (A. 2).

Applications géophysiques.

Nous avons calculé, avec la loi (17), pour les stations de Fribourg ($\delta = 26^\circ$) et de Dakar ($\delta = 66^\circ 5$), les valeurs du déplacement latéral :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x_0 = \frac{1}{4} z_m \frac{f_H}{f_c} \sin \delta X(0) \\ \Delta x_e = \frac{1}{4} z_m \frac{f_H}{f_c} \sin \delta X'(Y) \end{array} \right. \quad (31)$$

X' désignant l'intégrale $X(u)$, relative au rayon extraordinaire. Nous obtenons ainsi :

FRIBOURG				
f_c	$X(0)$	$\Delta x_0(\text{km})$	$X'(Y)$	$\Delta x_e(\text{km})$
3,1	13,11	55,32	0,73	3,09
6,0	20,30	44,49	1,69	3,70
6,6	21,55	42,92	1,88	3,74
7,6	23,52	40,68	2,15	3,71
DAKAR				
f_c	$X(0)$	$\Delta x_0(\text{km})$	$X'(Y)$	$\Delta x_e(\text{km})$
4,1	5,79	38,80	2,10	14,07
10,2	7,95	21,40	3,99	10,77
10,8	8,14	20,70	4,13	10,50
12,5	8,65	19,01	4,50	9,90

Il existe également un effet du gradient horizontal d'ionisation dont l'importance avait déjà été soulignée par M. COTTE [39] et par M. MILLINGTON [40].

Désignons par N_m la densité électronique maximum, nous avons :

$$f_c^2 = \frac{N_m e^2}{\pi m}$$

et nous avons entre la fréquence critique du rayon ordinaire et la fréquence critique du rayon extraordinaire la relation :

$$f_H = 2 \Delta_T - \frac{\Delta_T^2}{f_x}$$

où l'on a posé :

$$\Delta_T = f_x - f_c$$

Parfois, on observe une variation Δf_H de la gyrofréquence. Cette variation peut être due à deux causes possibles, soit à une augmentation ou diminution du champ magnétique terrestre H_0 , soit à une variation de la fréquence critique. Seule l'observation permet de préciser le genre de variation. Le champ magnétique extérieur étant supposé constant (ionosphère calme), nous voyons que la variation apparente Δf_H observée permet de déterminer Δf_c relativement à un déplacement latéral Δx_0 , et nous obtenons ainsi une estimation du gradient horizontal d'ionisation.

Nous avons représenté (fig. 5), un certain nombre d'enregistrements obtenus à l'observatoire de Kokubunji (Japon) permettant d'étudier l'évolution rapide d'une

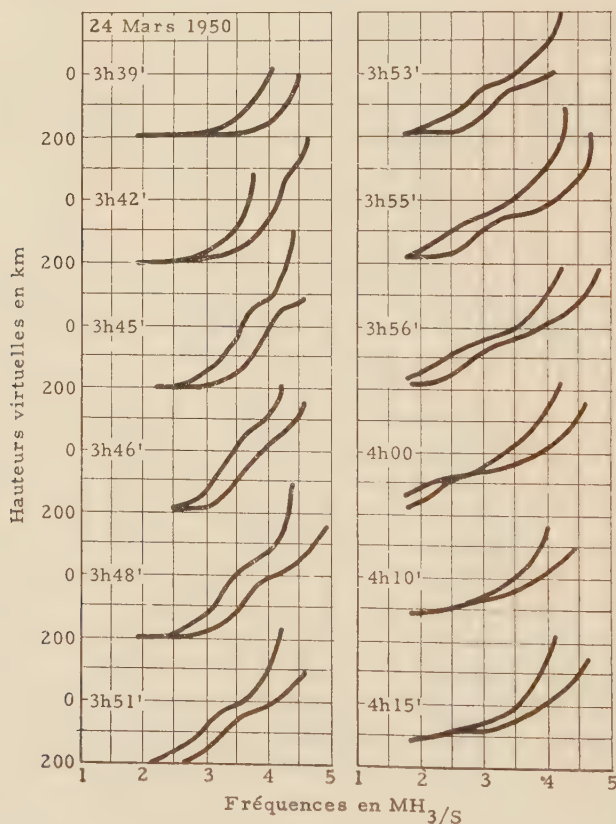


FIG. 5

perturbation. On peut remarquer que les aspects des traces dues aux rayons ordinaire et extraordinaire diffèrent dans la plupart des cas.

2°) Cas d'une propagation s'effectuant le long de l'équateur magnétique.

Nous avons dans ce cas :

$$\begin{aligned} \frac{\delta x}{\delta z} &= -\frac{1}{\cos \varphi_0} \left| \frac{\partial(z' \sin \varphi_0)}{\partial \varphi_0} \right|_{\delta = \frac{\pi}{2}, \Phi = \frac{\pi}{2}} \\ \frac{\delta y}{\delta z} &= \frac{1}{\sin \varphi_0} \left| \frac{\partial(z' \sin \varphi_0)}{\partial \Phi} \right|_{\delta = \frac{\pi}{2}, \Phi = \frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad (32)$$

Les trajectoires sont planes et nous obtenons pour *le rayon ordinaire* :

$$\begin{aligned} \frac{\delta y}{\delta z} &= 0 \\ x &= \pm \sin \varphi_0 \sqrt{\gamma} z_m \int_0^X \frac{dX}{\sqrt{(\cos^2 \varphi_0 - X) \left(\frac{1}{\gamma} - X \right)}} \end{aligned} \quad (34)$$

Nous voyons ainsi que le rayon ordinaire ne subit pas l'influence du champ magnétique.

Nous obtenons de même pour *le rayon extraordinaire* :

$$x = \pm \sin \varphi_0 \sqrt{\gamma} z_m \int_0^X \frac{(1 - Y^2 - X) dX}{\sqrt{(X_1 - X)(X_2 - X)(1 - Y^2 - X) \left(\frac{1}{\gamma} - X \right)}} \quad (35)$$

X_1 et X_2 étant racines de l'équation :

$$X^2 - (1 + \cos^2 \varphi_0) X + (1 - Y^2) \cos^2 \varphi_0 = 0. \quad (36)$$

La position de $\frac{1}{\gamma}$ variera dans la suite :

$$X_2 < 1 - Y^2 < X_1$$

ce qui met en évidence les cas d'intégration élémentaire :

$$\begin{cases} \frac{1}{\gamma} = 1 - Y^2 \\ \frac{1}{\gamma} = X_1 \\ \frac{1}{\gamma} = X_2 \end{cases} \quad (37)$$

Ce cas peut être étudié à l'aide de formules approchées ainsi que nous le verrons plus loin.

Signalons que parmi les applications pratiques, les relations précédentes permettent d'étudier la propagation à incidence oblique le long de l'équateur magnétique. Malheureusement, nous manquons à l'heure actuelle d'observations systématiques concernant cette région.

B. — Méthode approchée

I. Valeurs approchées des indices de réfraction.

a) La formule de l'indice permet de définir μ en fonction de θ de sorte que si l'on prend μ comme rayon vecteur et θ comme angle polaire, on peut représenter graphiquement les indices de réfraction ordinaire et extraordinaire. X étant un

paramètre variable, pour une valeur donnée de ω et de la gyropulsation ω_H nous aurons une famille de courbes $\mu(\theta)$ à deux branches correspondant respectivement aux rayons ordinaire et extraordinaire.

En coordonnées cartésiennes, ces courbes ont pour équation :

$$(x^2 + y^2)^2 (1 - X - Y^2) + (x^2 + y^2) [Y^2 (X x^2 - X + 2) - 2(1 - X)^2] - X Y^2 x^2 + (1 - X) [(1 - X)^2 - Y^2] = 0. \quad (38)$$

QUARTIQUES DE L'INDICE

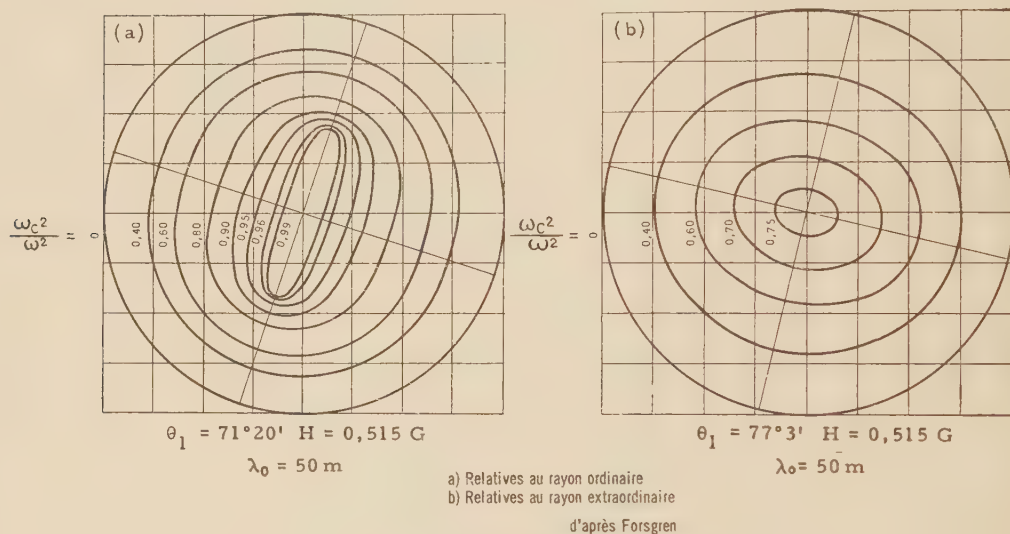


FIG. 6

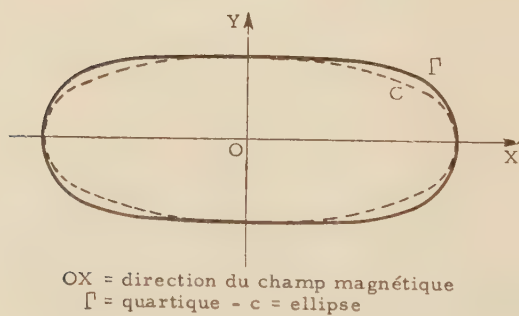


FIG. 7

Ces courbes sont des quartiques circulaires.

Dans le cas d'une propagation à incidence oblique, lorsque l'on néglige la courbure du milieu ionisé la loi de réfraction nous donne :

$$\mu \sin \varphi = \mu(0) \sin \varphi_0. \quad (39)$$

Oy figurant la verticale, δ l'angle entre la verticale et la direction du champ magnétique, Ox l'axe perpendiculaire à Oy; la construction d'HAMILTON nous permet de déterminer pour chaque valeur de X, lorsque l'on se donne φ_0 , la direction

du vecteur de POYNTING par rapport à la normale [41, 42]. Nous déterminons ainsi la trajectoire d'énergie.

Par construction graphique M. POEVERLEIN a pu ainsi déterminer les trajectoires d'énergie dans le plan du méridien magnétique [41].

b) Les quartiques (Γ) sont voisines d'ellipses admettant les mêmes axes et d'équations :

$$\frac{x^2}{\rho_M^2} + \frac{y^2}{\rho_m^2} = 1 \quad (40)$$

avec :

$$\begin{cases} \rho_M = \mu_M & \rho_m = \mu_m & (\text{pour le rayon ordinaire}) \\ \rho_M = n_M & \rho_m = n_m & (\text{pour le rayon extraordinaire}) \end{cases} \quad (41)$$

$$\mu_M^2 = 1 - \frac{X}{1+Y}, \quad n_M^2 = 1 - \frac{X}{1-Y}; \quad \mu_m^2 = 1 - X, \quad n_m^2 = \frac{(1-X)^2 - Y^2}{1-X-Y^2}.$$

Ces ellipses admettent les mêmes axes que les quartiques définies par (38).

Nous obtenons ainsi les expressions approchées de l'indice

$$\begin{aligned} \mu_o &= \sqrt{\frac{(1-X)(1+Y-X)}{1+Y-X-XY \cos^2 \theta}} & (\text{onde ordinaire}) \\ \mu_e &= \sqrt{\frac{(1-X-Y)(1-X+Y)}{1-X-Y^2+XY \cos^2 \theta}} & (\text{onde extraordinaire}) \end{aligned} \quad (42)$$

Ces formules ne font pas intervenir le couplage entre les ondes ordinaire et extraordinaire.

La comparaison avec la formule de APPLETON-HARTREE montre que l'erreur relative maximum est de l'ordre de :

$$1 - \frac{\mu_o}{\mu_A} \simeq 0,08$$

(μ_o valeur de μ_A approchée, μ_A indice de APPLETON-HARTREE).

II. Détermination des trajectoires.

a) Nous obtenons à l'aide du système (10) § A, mais où nous utilisons à la place de l'expression rigoureuse de l'indice les expressions approchées (42), l'équation différentielle des trajectoires de phase :

$$\begin{aligned} (\rho_m^2 \cos^2 \delta + \rho_M^2 \sin^2 \delta) z'^2 - 2(\rho_m^2 - \rho_M^2) \sin \delta \cos \delta \cos \Phi z' \\ + (\rho_m^2 - \rho_M^2) \sin^2 \delta \cos^2 \Phi + \rho_m^2 - \frac{\rho_m^2 \rho_M^2}{\sin^2 \varphi_0} = 0. \end{aligned} \quad (43)$$

De même le système (7), § A, nous donne l'équation différentielle des trajectoires de groupe :

$$\begin{cases} \frac{\delta x}{\delta z} = \frac{(\rho_m^2 - \rho_M^2) \sin \delta \cos \delta \cos \Phi z' + (\rho_m^2 - \rho_M^2) \sin^2 \delta \cos^2 \Phi + \rho_m^2}{(\rho_m^2 \cos^2 \delta + \rho_M^2 \sin^2 \delta) z' + (\rho_m^2 - \rho_M^2) \sin \delta \cos \delta \cos \Phi} \\ \frac{\delta y}{\delta z} = \frac{(\rho_m^2 - \rho_M^2) \sin \delta \cos \delta \sin \Phi z' + (\rho_m^2 - \rho_M^2) \sin^2 \delta \sin \Phi \cos \Phi}{(\rho_m^2 \cos^2 \delta + \rho_M^2 \sin^2 \delta) z' + (\rho_m^2 - \rho_M^2) \sin \delta \cos \delta \cos \Phi} \end{cases} \quad (44)$$

en adoptant la loi de variation (17) de la densité électronique, nous obtenons l'équation générale suivante de trajectoires :

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \frac{z_m \sqrt{\gamma}}{2} \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{1 + Y \cos^2 \delta}} \left\{ \pm g_0(X) \mp \frac{Y^2 \sin^2 \delta \cos^2 \delta \cos^2 \Phi}{1 + Y \cos^2 \delta} g_1(X) \right\} \\ &\quad - z_m \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \frac{Y \sin \delta \cos \delta \cos \Phi}{1 + Y \cos^2 \delta} g_2(X) \\ y &= \frac{z_m \sqrt{\gamma}}{2} \frac{Y \sin \varphi_0 \sin^2 \delta \sin \Phi \cos \Phi}{\sqrt{1 + Y \cos^2 \delta}} \left\{ \pm g_3(X) \mp \frac{Y \cos^2 \delta}{1 + Y \cos^2 \delta} g_1(X) \right\} \\ &\quad - z_m \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \frac{Y \sin \delta \cos \delta \sin \Phi}{1 + Y \cos^2 \delta} g_2(X) \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

pour le *rayon ordinaire*

$$\left\{ \begin{aligned} y &= \frac{z_m \sqrt{\gamma}}{2} \frac{\sin \varphi_0}{\sqrt{1 - Y \cos^2 \delta}} \left\{ \pm f_0(X) \mp \frac{Y^2 \sin^2 \delta \cos^2 \delta \cos^2 \Phi}{1 - Y \cos^2 \delta} f_1(X) \right\} \\ &\quad + z_m \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \frac{Y \sin \delta \cos \delta \cos \Phi}{1 - Y \cos^2 \delta} f_2(X) \\ y &= z_m \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \frac{\sin \varphi_0 \sin^2 \delta \sin \Phi \cos \Phi}{\sqrt{1 - Y \cos^2 \delta}} \left\{ \pm f_3(X) \mp \frac{Y \cos^2 \delta}{1 - Y \cos^2 \delta} f_1(X) \right\} \\ &\quad + z_m \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \frac{Y \sin \delta \cos \delta \sin \Phi}{1 - Y \cos^2 \delta} f_2(X) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

pour le *rayon extraordinaire*.

Les expressions g et f à l'exception de g_2 et f_2 s'expriment à l'aide des intégrales elliptiques :

$$g_0(X) = \int_0^X \frac{[1 + Y - (1 + Y \sin^2 \delta \cos^2 \Phi) X] dX}{\sqrt{(1 + Y - X) \left(\frac{1}{\gamma} - X \right) (X_1 - X) (X_2 - X)}}$$

$$g_1(X) = \int_0^X \frac{X^2 dX}{\left(\frac{1 + Y}{1 + Y \cos^2 \delta} - X \right) \sqrt{(1 + Y - X) (X_1 - X) (X_2 - X) \left(\frac{1}{\gamma} - X \right)}}$$

$$g_2(X) = \int_0^X \frac{X dX}{\left(\frac{1 + Y}{1 + Y \cos^2 \delta} - X \right) \sqrt{\frac{1}{\gamma} - X}}$$

$$g_3(X) = \int_0^X \frac{X dX}{\sqrt{(1 + Y - X) \left(\frac{1}{\gamma} - X \right) (X_1 - X) (X_2 - X)}}$$

$$f_0(X) = \int_0^X \frac{[1 - Y^2 (1 - Y \sin^2 \delta \cos^2 \Phi) X] dX}{\sqrt{(X'_1 - X) (X'_2 - X) (X'_3 - X) \left(\frac{1}{\gamma} - X \right)}}$$

$$\begin{aligned}
 f_1(X) &= \int_0^X \frac{X^2 dX}{\left(\frac{1-Y^2}{1-Y \cos^2 \delta} - X \right) \sqrt{(X'_1 - X)(X'_2 - X)(X'_3 - X) \left(\frac{1}{\gamma} - X \right)}} \\
 f_2(X) &= \int_0^X \frac{X dX}{\left(\frac{1-Y^2}{1-Y \cos^2 \delta} - X \right) \sqrt{\frac{1}{\gamma} - X}} \\
 f_3(X) &= \int_0^X \frac{X dX}{\sqrt{(X'_1 - X)(X'_2 - X)(X'_3 - X) \left(\frac{1}{\gamma} - X \right)}}
 \end{aligned} \tag{47}$$

X_1 et X_2 étant racines de l'équation :

$$(1 + Y \cos^2 \delta) X^2 - [1 + Y \cos^2 \delta + Y \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \delta \sin^2 \Phi + (1 + Y) \cos^2 \varphi_0] X + (1 + Y) \cos^2 \varphi_0 = 0.$$

X'_1, X'_2, X'_3 sont racines de l'équation du 3^e degré :

$$\begin{aligned}
 (1 - Y \cos^2 \delta) X^3 - [2(1 - Y \cos^2 \delta) - Y \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \delta \sin^2 \Phi + \cos^2 \varphi_0 \\
 + Y \sin^2 \varphi_0 - Y^2] X^2 \\
 - [Y \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \delta \sin^2 \Phi + (2 - Y) \sin^2 \varphi_0 - 3 + Y \cos^2 \delta] (1 - Y^2) X \\
 + (1 - Y^2) \cos^2 \varphi_0 = 0.
 \end{aligned}$$

b) Les intégrales $g_0, g_1, g_3, f_0, f_1, f_3$ se calculent à l'aide des fonctions de JACOBI. On peut les réduire aux intégrales de LEGENDRE de première et de troisième espèce.

Considérons les quatre racines figurant sous le radical d'une des expressions g_1 ou f_1 et désignons-les par d, c, b, a . Ces racines étant classées dans l'ordre :

$$d < c < b < a \tag{48}$$

la transformation :

$$X = \frac{d(a-c) - c(a-d) t^2}{(a-c) - (a-d) t^2}$$

nous conduira aux intégrales de LEGENDRE :

$$F(\theta, k) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad \Pi(\theta, m, k) = \int_0^\theta \frac{d\theta}{(1 + m \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

avec $t = \sin \theta$,

$$k^2 = \frac{(b-c)(a-d)}{(b-d)(a-c)}$$

Pour notre problème la position de trois des valeurs précédentes (48) est fixe, soit :

$$d < c < b$$

La quatrième valeur a étant variable. Nous aurons ainsi à examiner les cas :

$$d < c < b < a$$

$$d < c < a < b$$

$$d < a < c < b$$

Remarquons que les trajectoires à incidence normale ont pour équations, pour l'onde ordinaire et l'onde extraordinaire respectivement :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{z_m \sqrt{\gamma}}{2} \frac{Y \sin \delta \cos \delta \cos \Phi}{1 + Y \cos^2 \delta} g_2(X) \\ y = -\frac{z_m \sqrt{\gamma}}{2} \frac{Y \sin \delta \cos \delta \sin \Phi}{1 + Y \cos^2 \delta} g_2(X) \end{array} \right. \quad (49)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{z_m \sqrt{\gamma}}{2} \frac{Y \sin \delta \cos \delta \cos \Phi}{1 - Y \cos^2 \delta} f_2(X) \\ y = \frac{z_m \sqrt{\gamma}}{2} \frac{Y \sin \delta \cos \delta \sin \Phi}{1 - Y \cos^2 \delta} f_2(X) \end{array} \right. \quad (50)$$

La relation $\frac{x}{y} = \cotg \Phi$ nous montre qu'elles sont situées dans le plan du méridien magnétique. Il est plus simple dans ce cas de procéder à une intégration directe (voir plus loin).

c) *Etude de certains cas particuliers.*

Nous nous limitons dans ce qui suit à l'étude des cas suivants :

A) Cas d'une propagation équatoriale quelconque $\left(\Phi \text{ quelconque, } \delta = \frac{\pi}{2} \right)$.

B) Cas d'une propagation s'effectuant à une latitude géomagnétique quelconque, suivant la direction est-ouest :

$$\Phi = \frac{\pi}{2}, \delta \text{ quelconque.}$$

C) Cas d'une propagation s'effectuant dans le plan du méridien magnétique $(\Phi = 0, \delta \text{ quelconque})$.

Les cas de propagation polaire et équatoriale de direction est-ouest ou nord-sud (plan du méridien magnétique) sont des cas particuliers obtenus par dégénérescence des cas précédents.

On peut à partir de A), B) et C), déterminer par interpolation l'ordre de grandeur des modifications apportées par la présence du champ magnétique terrestre dans l'étude d'une trajectoire quelconque (valeur de Φ et de δ arbitraires).

Cas A) Φ quelconque, $\delta = \frac{\pi}{2}$:

Dans le cas du rayon ordinaire :

$$\begin{aligned} x_1 &= \sin \varphi_0 \sqrt{\gamma} z_m \int_0^{x_2} \frac{[1 + Y - X(1 + Y \cos^2 \Phi)] dX}{\sqrt{(X_2 - X)(X_1 - X)(1 + Y - X)\left(\frac{1}{\gamma} - X\right)}} \\ x_2 &= -\frac{\sin \varphi_0 \sqrt{\gamma}}{2} z_m Y \sin 2\Phi \int_0^{x_2} \frac{X dX}{\sqrt{(X_2 - X)(X_1 - X)(1 + Y - X)\left(\frac{1}{\gamma} - X\right)}} \end{aligned} \quad (51)$$

X_1 et X_2 ($X_2 < X_1$) sont racines de l'équation :

$$X^2 + [Y^2 \cos^2 \Phi \sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \varphi_0 - (1 + Y)] X + (1 + Y) \cos^2 \varphi_0 = 0,$$

par suite nous aurons :

$$X_2 < X_1 < 1 + Y.$$

La position de $\frac{1}{\gamma}$ étant variable nous avons plusieurs possibilités :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_2 < X_1 < 1 + Y < \frac{1}{\gamma} \\ X_2 < X_1 < \frac{1}{\gamma} < 1 + Y \\ X_2 < \frac{1}{\gamma} < X_1 < 1 + Y \end{array} \right.$$

et les cas limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 + Y = \frac{1}{\gamma}, \\ X_1 = \frac{1}{\gamma}. \end{array} \right.$$

Nous obtenons pour expression de la distance atteinte dans l'ionosphère :

$$\Delta_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}. \quad (52)$$

De la même manière, nous obtenons pour le rayon extraordinaire :

$$\begin{aligned} x_3 &= \sin \varphi_0 \sqrt{\gamma} z_m \int_0^{X_2} \frac{[1 - X(1 - Y \cos^2 \Phi) - Y^2] dX}{\sqrt{(X_2 - X)(X_1 - X)(1 - Y^2 - X)\left(\frac{1}{\gamma} - X\right)}} \\ x_4 &= \frac{\sin \varphi_0 \sqrt{\gamma}}{2} z_m Y \sin 2\Phi \int_0^{X_2} \frac{X dX}{\sqrt{(X_2 - X)(X_1 - X)(1 - Y^2 - X)\left(\frac{1}{\gamma} - X\right)}} \end{aligned} \quad (53)$$

Avec :

$$X_2 < 1 - Y^2 < X_1 \quad (\text{position de } \frac{1}{\gamma} \text{ variable})$$

X_2 et X_1 étant racines de l'équation :

$$X^2 - [2 - \sin^2 \varphi_0 (1 - Y \cos^2 \Phi)] X + (1 - Y^2) \cos^2 \varphi_0 = 0.$$

Nous aurons :

$$\Delta_2 = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}. \quad (54)$$

Déviation latérale. — Les relations précédentes permettent d'évaluer la déviation latérale à la base de l'ionosphère (fig. 8, A, B)

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \omega_1 &= \frac{x_2}{x_1} & (\text{rayon ordinaire}) \\ \operatorname{tg} \omega_2 &= \frac{x_4}{x_3} & (\text{rayon extraordinaire}). \end{aligned} \quad (55)$$

Cas B : $\Phi = \frac{\pi}{2}$, δ quelconque.

La trajectoire à incidence normale présente un point d'arrêt, par suite la trajectoire d'énergie est gauche mais la déviation latérale est nulle.

a) *Pour le rayon ordinaire :*

$$x_1 = z_m \sin \varphi_0 \sqrt{\frac{\gamma}{1 + Y \cos^2 \delta}} J_1 \quad (56)$$

avec :

$$J_1 = \int_0^{\cos^2 \varphi_0} \frac{(1 + Y - X) dX}{\sqrt{(\cos^2 \varphi_0 - X) \left(\frac{1 + Y}{1 + Y \cos^2 \delta} - X \right) (1 + Y - X) \left(\frac{1}{\gamma} - X \right)}}$$

avec :

$$\cos^2 \varphi_0 < \frac{1 + Y}{1 + Y \cos^2 \delta} < 1 + Y.$$

b) *Pour le rayon extraordinaire :*

$$x_3 = \sin \varphi_0 z_m \sqrt{\frac{\gamma}{1 - Y \cos^2 \delta}} J_2 \quad (57)$$

où

$$J_2 = \int_0^{X_2} \frac{(1 - X - Y^2) dX}{\sqrt{(X_2 - X) (X_1 - X) \left(\frac{1 - Y^2}{1 - Y \cos^2 \delta} - X \right) \left(\frac{1}{\gamma} - X \right)}}$$

Nous avons deux cas possibles suivant les valeurs de δ :

$$\begin{cases} X_2 < \frac{1 - Y^2}{1 - Y \cos^2 \delta} < X_1 \\ X_2 < X_1 < \frac{1 - Y^2}{1 - Y \cos^2 \delta} \end{cases} \quad (58)$$

X_2 et X_1 sont racines de l'équation :

$$X^2 - X(1 + \cos^2 \varphi_0) + \cos^2 \varphi_0(1 - Y^2) = 0.$$

c) *Propagation polaire et propagation équatoriale.* — Dans le cas de la propagation polaire (propagation isotrope), on peut poser $\delta = 0$ et dans le cas de propagation équatoriale de direction est-ouest $\delta = \frac{\pi}{2}$ et $\Phi = \frac{\pi}{2}$ dans l'équation générale des trajectoires (43) (44).

Il est à noter que l'étude de ce dernier type de propagation est le même d'après la théorie générale (formule de APPLETON-HARTREE).

Cas C (plan du méridien magnétique δ quelconque $\Phi = 0$)

Nous devons poser $\Phi = 0$ dans les expressions (45) et (46).

a) *Rayon ordinaire.* — Nous voyons que X_1 et X_2 sont racines de l'équation :
 $(1 + Y \cos^2 \delta) X^2 - [1 + Y \cos^2 \delta + (1 + Y) \cos^2 \varphi_0] X + (1 + Y) \cos^2 \varphi_0 = 0$
 c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} X_1 &= 1 \\ X_2 &= \frac{(1 + Y) \cos^2 \varphi_0}{1 + Y \cos^2 \delta} \end{aligned} \quad (59)$$

et nous avons deux cas à considérer :

$$\begin{cases} \text{a) } 1 < \frac{(1+Y) \cos^2 \varphi_0}{1+Y \cos^2 \delta} < 1+Y & \left(\sin \varphi_0 < \sqrt{\frac{Y}{1+Y}} \sin \delta \right) \\ \text{b) } \frac{(1+Y) \cos^2 \varphi_0}{1+Y \cos^2 \delta} < 1 < 1+Y & \left(\sin \varphi_0 > \sqrt{\frac{Y}{1+Y}} \sin \delta \right) \end{cases} \quad (60)$$

Dans le premier cas les trajectoires possèdent un point de rebroussement (cas de pseudo réflexion), dans le second cas les trajectoires admettent un maximum normal (fig. 8 B2).

b) *Rayon extraordinaire.* — X_1 et X_2 sont alors racines de l'équation :

$$(1 - Y \cos^2 \delta) X^2 - (1 - Y) (Y \sin^2 \delta + \cos^2 \varphi_0 + 1) X + (1 - Y) (1 - Y^2) \cos^2 \varphi_0 = 0. \quad (61)$$

Les trajectoires ne présentent pas de singularité.

Dans le cas où $\Phi = 0$, $\delta = \frac{\pi}{2}$.

a) *Pour le rayon ordinaire :*

$$x_1 = \sin \varphi_0 \sqrt{Y} z_m (1 + Y) I \quad (62)$$

avec :

$$I = \int_0^{\xi} \frac{(1 - X) dX}{\sqrt{[(1 + Y) \cos^2 \varphi_0 - X] (1 - X) (1 + Y - X) \left(\frac{1}{Y} - X \right)}}$$

où ξ limite supérieure est égale à $(1 + Y) \cos^2 \varphi_0$ ou 1 suivant que :

$$\cos \varphi_0 < \sqrt{\frac{1}{1 + Y}}$$

ou

$$\cos \varphi_0 \geq \sqrt{\frac{1}{1 + Y}}.$$

Ce dernier cas correspond à l'existence sur la trajectoire d'un point de rebroussement à tangente verticale.

b) *Pour le rayon extraordinaire :*

$$x_3 = \sin \varphi_0 \sqrt{Y} z_m (1 - Y) I_2 \quad (63)$$

$$I_2 = \int_0^{(1-Y) \cos^2 \varphi_0} \frac{(1 + Y - X) dX}{\sqrt{[(1 - Y) \cos^2 \varphi_0 - X] (1 - Y^2 - X) (1 + Y - X) \left(\frac{1}{Y} - X \right)}}$$

Nous avons toujours :

$$(1 - Y) \cos^2 \varphi_0 < 1 - Y^2 < 1 + Y.$$

II. — Détermination de la fréquence maximum utilisable

Les calculs sont en général très laborieux. Nous allons montrer comment on peut traiter le problème à l'aide des formules approchées précédentes.

Les calculs sont en général extrêmement laborieux. Nous allons montrer comment on peut traiter le problème à l'aide des formules approchées précédentes.

Première méthode :

Nous avons :

$$D = 2 z_0 \operatorname{tg} \varphi_0 + x \quad (\text{fig. 8, C2}) \quad (64)$$

la fréquence maximum utilisable pourra être déterminée si l'on s'impose la condition :

$$\frac{\partial D}{\partial \varphi_0} = 0. \quad (65)$$

Ceci est l'extension directe de la méthode de APPLETON-BEYON [47].

Deuxième méthode

Les formules (64) et (65) appliquées, abstraction faite de la présence du champ magnétique, permettent de déterminer, connaissant D , la MUF f_m ; pour cette valeur de la fréquence, la relation (65) appliquée, compte tenu de la présence du champ magnétique, conduit à une valeur de la distance $D_M \neq D$; la différence $D_M - D = \Delta D$ permettra de déterminer la correction Δf_m à appliquer à f_m .

Troisième méthode

Cette méthode consiste à évaluer la différence $f_X - f_R$, et f_X et f_R désignant les fréquences critiques à incidence oblique des rayons ordinaire et extraordinaire. Une telle différence peut être évaluée connaissant f_c et φ_0 .

Remarquons que la distance X , dans le cas où l'on néglige le champ magnétique terrestre (APPLETON-BEYON), est donnée par l'intégrale élémentaire :

$$X = \sin \varphi_0 \int_0^{\cos^2 \varphi_0} \frac{dX}{\sqrt{(\cos^2 \varphi_0 - X) \left(\frac{1}{\gamma} - X \right)}}. \quad (66)$$

Cette intégrale diverge pour :

$$\frac{1}{\gamma} = \cos^2 \varphi_0 \quad (67)$$

c'est-à-dire :

$$f_R = \frac{f_c}{\cos \varphi_0} \quad (\text{loi de la sécante}) \quad (68)$$

D'une manière générale, dans le calcul des intégrales exprimées plus haut, figure une suite de nombres :

$$X_2 < X_1 < X_3$$

et un quatrième $\frac{1}{\gamma}$ dont la position dans la suite est variable. Pour $X_2 = \frac{1}{\gamma}$ l'intégrale divergera et l'on obtiendra ainsi une généralisation de la relation (67).

Appliquons cette remarque à ce qui précède :

A) Φ quelconque $\delta = \frac{\pi}{2}$. Nous obtenons :

$$\begin{cases} \left(\frac{f_c}{f_R} \right)^4 + \left[\left(\frac{f_H}{f_R} \right) \cos^2 \Phi \sin^2 \varphi_0 - (1 + \cos^2 \varphi_0) - \frac{f_H}{f_R} \right] \left(\frac{f_c}{f_R} \right)^2 + \left(1 + \frac{f_H}{f_R} \right) \cos^2 \varphi_0 = 0 \\ \left[\left(\frac{f_c}{f_X} \right)^4 - \left[2 - \sin^2 \varphi_0 \left(1 - \frac{f_H}{f_X} \cos^2 \Phi \right) \right] \left(\frac{f_c}{f_X} \right)^2 + \left[1 - \left(\frac{f_H}{f_X} \right)^2 \right] \cos^2 \varphi_0 = 0 \end{cases} \quad (69)$$

Les équations précédentes nous permettront de déterminer respectivement f_R et f_X (équation du 4^e degré). Nous en déduirons $f_X - f_R$.

B) $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\delta = \frac{\pi}{2}$. Nous obtenons :

$$f_R = \frac{f_C}{\cos \varphi_0} \quad (\text{loi de la sécante})$$

$$\left(\frac{f_C}{f_X}\right)^4 - \left(\frac{f_C}{f_X}\right)^2 (1 + \cos^2 \varphi_0) + \cos^2 \varphi_0 \left[1 - \left(\frac{f_H}{f_X}\right)^2\right] = 0. \quad (70)$$

C) $\Phi = 0$, δ quelconque

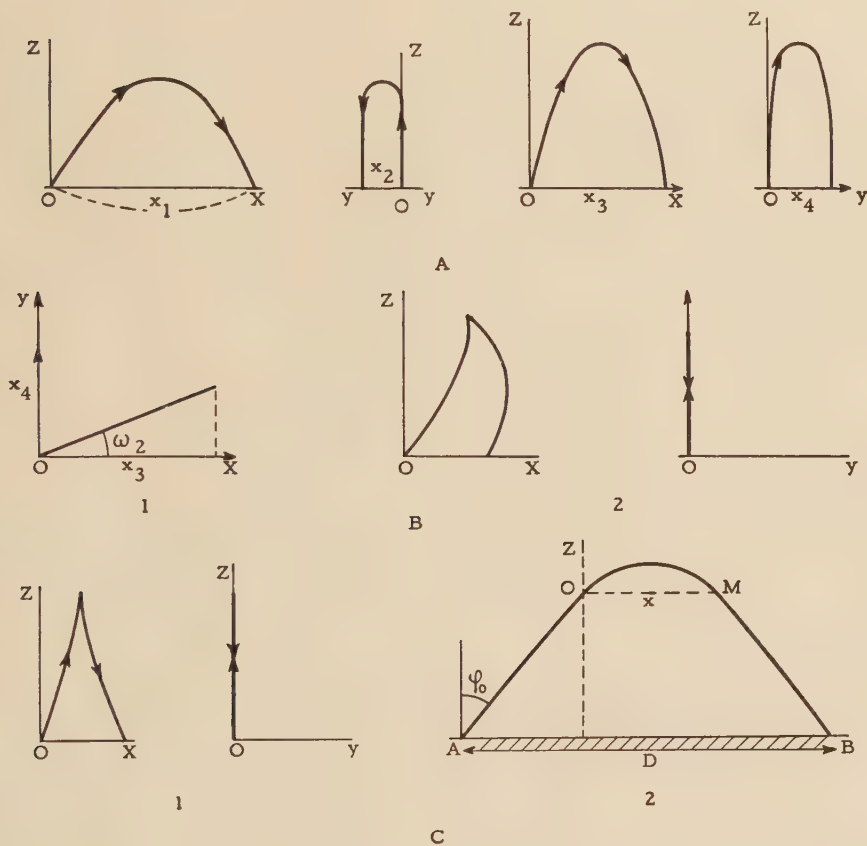


FIG. 8

Cas du rayon ordinaire.

1° Considérons d'abord le cas où :

$$\sin \varphi_0 < \sqrt{\frac{Y_C}{1 + Y_C}} \sin \delta \quad \left(Y_C = \frac{f_H}{f_C}\right) \quad (71)$$

nous avons alors :

$$f_C = f_R. \quad (72)$$

2° Pour :

$$\sin \varphi_0 \geq \sqrt{\frac{Y_c}{1+Y_c}} \sin \delta \quad (73)$$

f_R satisfait à l'équation :

$$f_R^3 \cos^2 \varphi_0 + f_R^2 f_H \cos^2 \varphi_0 - f_R f_c^2 - f_c^2 f_H \cos^2 \delta = 0. \quad (74)$$

Cas du rayon extraordinaire

f_X est racine de l'équation :

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{f_H}{f_X} \cos^2 \delta\right) \left(\frac{f_c}{f_X}\right)^4 - \left(1 - \frac{f_H}{f_X}\right) \left(\frac{f_H}{f_X} \sin^2 \delta + \cos^2 \varphi_0 + 1\right) \left(\frac{f_c}{f_X}\right)^2 \\ + \left(1 - \frac{f_H}{f_X}\right) \left[1 - \left(\frac{f_H}{f_X}\right)^2\right] \cos^2 \varphi_0 = 0 \end{aligned} \quad (75)$$

$$D) \quad \Phi = 0, \quad \delta = \frac{\pi}{2}$$

Cas du rayon ordinaire :

1° pour $\cos \varphi_0 > \sqrt{\frac{1}{1+Y_c}}$, nous avons $f_c = f_R$,

2° si l'on a :

$$\cos \varphi_0 \leq \sqrt{\frac{1}{1+Y_c}}$$

alors

$$\cos^2 \varphi_0 \left(1 + \frac{f_H}{f_R}\right) = \left(\frac{f_c}{f_R}\right)^2$$

Cas du rayon extraordinaire :

Nous avons toujours

$$\cos^2 \varphi_0 \left(1 - \frac{f_H}{f_X}\right) = \left(\frac{f_c}{f_X}\right)^2 \quad (76)$$

Donc pour le cas 1°

$$f_X = \frac{f_H}{2} + \sqrt{\left(\frac{f_H}{2}\right)^2 + \left(\frac{f_c}{\cos \varphi_0}\right)^2} \quad (77)$$

c'est-à-dire sensiblement

$$f_X \simeq \frac{f_H}{2} + \frac{f_c}{\cos \varphi_0} \quad (78)$$

et nous retrouvons le cas classique

$$f_X - f_c \simeq \frac{f_H}{2} \quad (\text{incidence normale}) \quad (79)$$

Dans le cas 2°

$$f_X - f_R = f_H \quad (80)$$

on peut comparer les relations précédentes aux formules empiriques proposées par GREEN et HARRISON [48]

$$\begin{cases} (f_m)_0 = \left(f_{F2}^0 + \frac{f_H}{2}\right) \sec \varphi_0 \\ (f_m)_{3000} = (f_{F2}^0 + f_H) \sec \varphi_{3000} \end{cases} \quad (81)$$

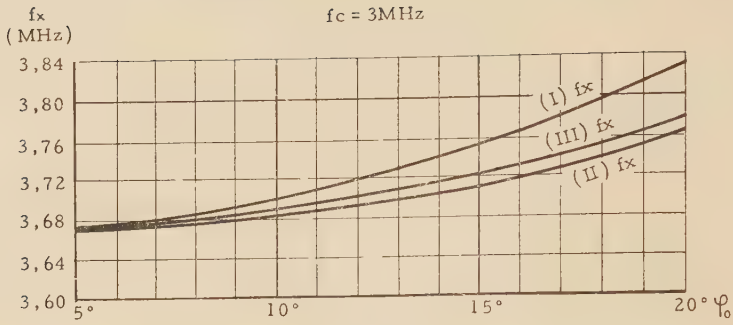


FIG. 9a

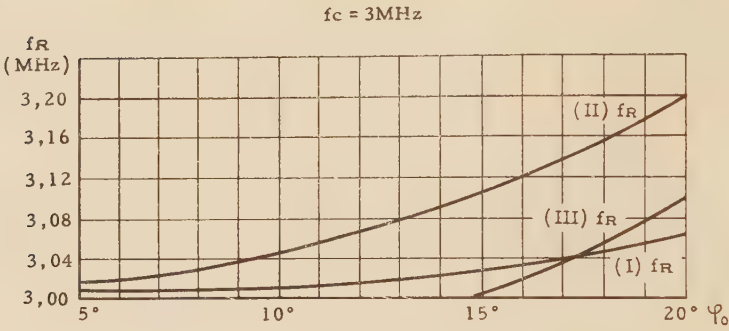


FIG. 9b

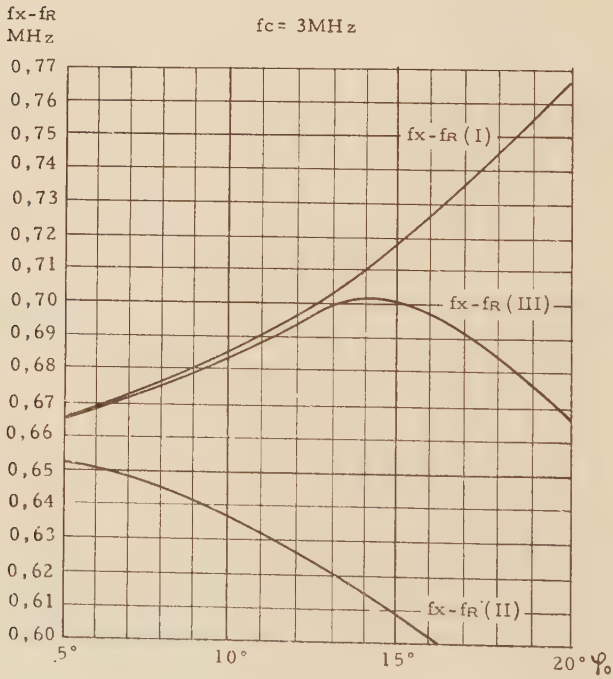


FIG. 9c

$f_c = 4\text{MHz}$

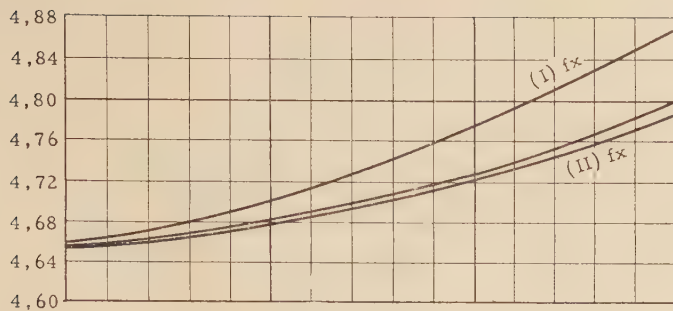


FIG. 10a

$f_c = 4\text{MHz}$

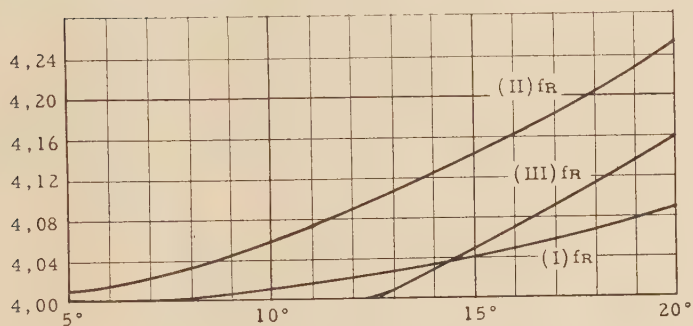


FIG. 10b

$f_x - f_R$
MHz

$f_c = 4\text{MHz}$

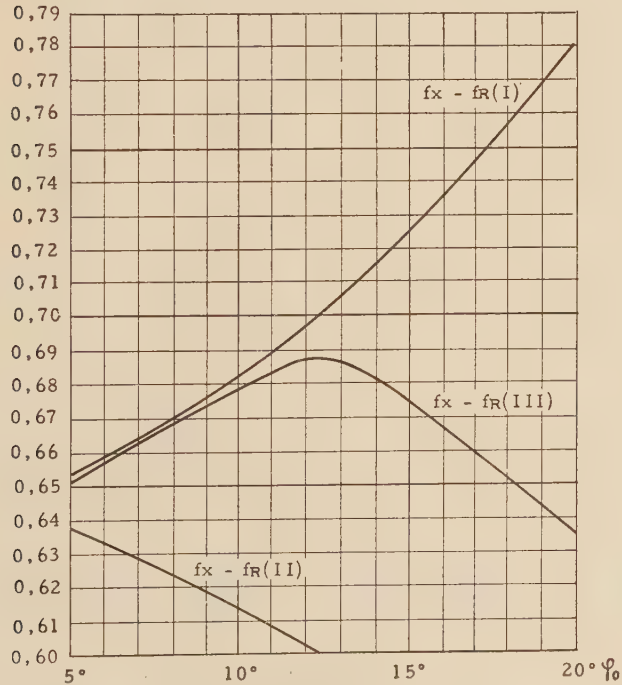


FIG. 10c

avec :

$$r' = \frac{dr}{d\Omega}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_0 = \rho_m^2(r) \cos^2 \delta + \rho_M^2(r) \sin^2 \delta \\ F_1 = [\rho_m^2(r) - \rho_M^2(r)] \sin \delta \cos \delta \cos \Phi \\ F_2 = [\rho_m^2(r) - \rho_M^2(r)] \sin^2 \delta \cos^2 \Phi + \rho_M^2(r) \end{array} \right. \quad (84)$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dr}{d\Omega} = \psi(r) \quad (85)$$

$$\Omega = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\psi(r)}$$

On peut remarquer que δ est supposé constant, en réalité le parcours dans l'ionosphère étant relativement faible, on peut admettre une variation $\Delta\delta$ petite, d'où l'on déduira $\Delta\Omega$. On peut raisonner plus rigoureusement, en tenant compte de l'hypothèse du doublet géomagnétique.

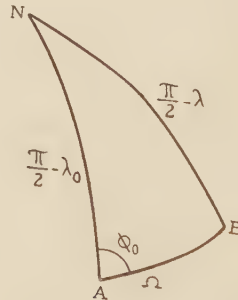
λ désignant la latitude géomagnétique, nous avons les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cotg \delta = 2 \operatorname{tg} \lambda \\ \sin \lambda = \sin \lambda_0 \cos \Omega + \sin \Omega \cos \lambda_0 \cos \Phi_0 \\ \sin \Phi = \cos \lambda_0 \frac{\sin \Phi_0}{\cos \lambda} \end{array} \right. \quad (86)$$

auxquelles on adjoindra l'expression de la variation de Y :

$$Y = Y_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 \sqrt{1 + 3 \sin^2 \lambda}$$

et l'on pourra résoudre l'équation différentielle (85) par une méthode d'intégration numérique.



Il est à noter que cette méthode peut être appliquée lorsque l'on tien compte de la valeur rigoureuse de l'indice (APPLETON-HARTREE) sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir la théorie magnéto-ionique généralisée de GERSON et SEATON [49].

IV. — Il est intéressant également d'étudier les trajectoires à incidence normale lorsque l'on adopte la loi de variation de la densité électronique écrite sous la forme (17) :

$$X = \frac{1}{\gamma} \left[2 \left(\frac{z}{z_m} \right) - \left(\frac{z}{z_m} \right)^2 \right]$$

A incidence normale nous avons :

$$\frac{dx}{dz} = 0$$

et nous obtenons à partir de (44) :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{\rho_m^2 \cos \delta + \rho_M^2 \sin^2 \delta}{(\rho_M^2 - \rho_m^2) \sin \delta \cos \delta} \quad (88)$$

Au point de réflexion du rayon ordinaire, nous avons :

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x} \right)_0 = \operatorname{tg} \delta \quad (\mu_m = 0) \quad (89)$$

la tangente au rayon ordinaire est perpendiculaire au champ magnétique.

De même au point de réflexion du rayon extraordinaire :

$$\left(\frac{\delta z}{\delta x} \right)_e = - \frac{2 + \operatorname{tg}^2 \delta}{\operatorname{tg} \delta} \quad (90)$$

ce qui est en accord avec les résultats de M. COTTE [39]. Avec la loi de variation (17), nous pouvons écrire l'équation des trajectoires d'énergie à incidence normale, sous la forme :

$$\frac{\delta z}{\delta x} = \frac{b \left[2 \frac{z}{z_m} - \left(\frac{z}{z_m} \right)^2 \right]}{1 - a \left[2 \frac{z}{z_m} - \left(\frac{z}{z_m} \right)^2 \right]} \quad (91)$$

les coefficients a et b ayant respectivement pour valeurs :

$$\begin{cases} a = \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega + \omega_H \cos^2 \delta}{\omega + \omega_H} \right) \\ b = \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \left(\frac{\omega_H}{\omega + \omega_H} \right) \sin \delta \cos \delta \end{cases} \quad (92)$$

pour le *rayon ordinaire*.

$$\begin{cases} a = \frac{\omega_c^2}{\omega(\omega + \omega_H)} \left(\frac{\omega - \omega_H \cos^2 \delta}{\omega - \omega_H} \right) \\ b = - \frac{\omega_c^2}{\omega(\omega + \omega_H)} \left(\frac{\omega_H}{\omega - \omega_H} \right) \sin \delta \cos \delta \end{cases} \quad (93)$$

pour le *rayon extraordinaire*.

Nous obtenons trois types de trajectoires correspondant aux cas où l'on a :

$$a < 1, \quad a = 1, \quad a > 1. \quad (94)$$

pour $a < 1$:

$$x = \frac{b}{a} \left\{ -z + z_m \sqrt{\frac{1}{a(1-a)}} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{z - z_m}{z_m} \right) \sqrt{\frac{a}{1-a}} + \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a}{1-a}} \right] \right\} \quad (95)$$

Pour $a = 1$:

$$x = \frac{b}{a} \left(\frac{z^2}{z_m - z} \right) \quad (96)$$

Pour $a > 1$:

$$x = \frac{b}{a} \left[\frac{\alpha^2 - 2\alpha z_m}{\beta - \alpha} \operatorname{Ln} \left(1 - \frac{z}{\alpha} \right) + \frac{2\beta z_m - \beta^2}{\beta - \alpha} \operatorname{Ln} \left(1 - \frac{z}{\beta} \right) - z \right] \quad (97)$$

α et β étant les racines de l'équation :

$$a \left(\frac{z}{z_m} \right)^2 - 2a \left(\frac{z}{z_m} \right) + 1 = 0. \quad (98)$$

L'ordre de grandeur de la déviation nous sera donné par les valeurs suivantes de z :

$$z = z_m \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2} \right) \quad (99)$$

dans le cas du rayon ordinaire.

$$z = z_m \left[1 - \frac{\omega}{\omega_c} \sqrt{\left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 + \left(\frac{\omega_H}{\omega} \right)^2 - 1} \right] \quad (100)$$

dans le cas du rayon extraordinaire.

L'expression de la déviation ainsi obtenue a été utilisée par MM. SUCHY et VILA [51] lors d'une étude sur les anomalies de la déviation des trajectoires des ondes ordinaire et extraordinaire observées à Dakar.

C. — Influence de l'absorption

Dans le cas général, l'équation de l'onde doit être écrite sous la forme (3, 1). D'autre part, nous devons tenir compte de la direction du champ magnétique extérieure; il en résulte que les cosinus directeurs du plan d'onde et du champ magnétique ainsi que les paramètres directeurs relatifs aux coefficients d'extinction doivent vérifier un certain nombre de relations que l'on forme à partir de l'équation du mouvement des ions. Ces relations sont compliquées, et il est difficile pratiquement de calculer la trajectoire du rayon électromagnétique et l'absorption subie par l'onde durant la traversée de la région ionisée considérée.

Deux cas se prêtent cependant à ces calculs relativement simples, il s'agit du cas d'incidence normale et du cas d'une propagation le long de l'équateur magnétique.

a) Le premier cas a été étudié précédemment par MM. RAWER, SUCHY, et l'auteur [52] à partir des expressions approchées de l'indice (42) et de l'équation de APPLETON-HARTREE. On substitue aux grandeurs :

$$X = \left(\frac{\omega_0}{\omega} \right)^2, \quad Y = \frac{\omega_H}{\omega}$$

les expressions :

$$\tilde{X} = \frac{X}{1 - iZ}, \quad \tilde{Y} = \frac{Y}{1 - iZ} \quad \text{où} \quad Z = \frac{\nu}{\omega}. \quad (101)$$

On obtient en ce qui concerne le rayon ordinaire l'expression approchée de l'indice complexe

$$\mu^2 = \frac{(1 - \tilde{X})(1 + \tilde{Y} - \tilde{X})}{1 + \tilde{Y} - \tilde{X} - \tilde{X}Y \cos^2 \delta} \quad (102)$$

La séparation des parties réelle et imaginaire nous conduit alors à une valeur approchée du coefficient d'absorption.

Nous avons utilisé les valeurs :

$$f_c = 3,5 \text{ MHz}, \quad f_H = 1,149 \text{ MHz}, \quad \delta = 23^\circ 16'$$

et nous avons choisi les valeurs de f :

$$f = 2,62 ; 2,94 ; 3,15 ; 3,36 ; 3,45 \text{ MHz}$$

Pour $X < 0,7$, l'approximation quasi-longitudinale étant valable, nous avons utilisé la valeur suivante, déduite de l'équation de APPLETON-HARTREE :

$$k = \pi \frac{f}{c} \frac{ZX \left(1 + \frac{Y^2 \sin^2 \delta}{2(1-X)^2} \right)}{\left(1 + Y \cos \delta - \frac{Y^2 \sin^2 \delta}{2(1-X)} \right)^{3/2} \left(1 - X + Y \cos \delta - \frac{Y^2 \sin^2 \delta}{2(1-X)} \right)^{1/2}} \quad (103)$$

Au voisinage de $X = 1$, les valeurs de k devenant très élevées, on peut admettre que l'approximation quasi-transversale est valable et l'on a :

$$k = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\frac{1}{2} (\sqrt{\tilde{\omega}^2 + \chi^2} - \tilde{\omega})}$$

où

$$\chi = (1 + \cotg^2 \delta) Z, \quad \tilde{\omega} = (1 + \cotg^2 \delta) u - \chi^2, \quad u = 1 - X \quad (u < 0,015)$$

Pour $f = 3,46 \text{ MHz}$ le calcul rigoureux a été effectué à l'aide de l'expression (11). de l'indice, les résultats sont représentés sur la figure 11. Nous voyons ainsi qu'il

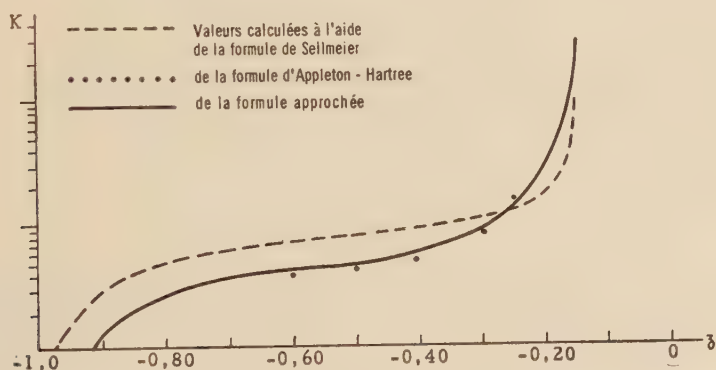


FIG. 11

existe une bonne concordance entre les valeurs calculées à l'aide de l'expression approchée (102) et de la formule rigoureuse. D'autre part, nous remarquons également que la formule de SELMEIER (champ magnétique nul) conduit à des valeurs du coefficient d'absorption beaucoup trop élevées; lorsque $X < 0,7$ la correction est de l'ordre de 50 %, d'autre part, elle change de signe vers $X = 0,9$ et devient positive (+ 150 %) pour $X = 1$.

L'évaluation de l'intégrale

$$\delta = \int k dz \quad (105)$$

nous montre que la correction globale est relativement faible. Le champ magnétique agissant de façon inverse suivant que :

$$X < 0,9 \quad \text{ou} \quad X \geq 0,9.$$

b) Le cas d'une propagation le long de l'équateur magnétique se prête à des

calculs relativement simples, du fait que $\theta = \frac{\pi}{2}$ ainsi qu'il résulte de la relation (6, 1).

Le coefficient d'extinction :

$$\chi = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{-(P - \sin^2 \varphi_0) + \sqrt{(P - \sin^2 \varphi_0)^2 + Q^2}} \quad (106)$$

nous permet de calculer l'absorption à incidence oblique :

$$\delta = \frac{\omega}{c} \int \chi dz \quad (107)$$

nous avons pour le *rayon ordinaire* :

$$\begin{aligned} P &= 1 - \frac{X}{1 + Z^2} \\ Q &= Z \frac{X}{1 + Z^2} \end{aligned} \quad (108)$$

pour le *rayon extraordinaire* :

$$\begin{cases} P = 1 - \frac{X [(1 - X)^2 - Y^2 (1 - X) + Z^2]}{(1 - X - Y^2 - Z^2)^2 + (2 - X)^2 Z^2} \\ Q = Z \frac{X [(1 - X)^2 + Y^2 + Z^2]}{(1 - X - Y^2 - Z^2)^2 + (2 - X)^2 Z^2} \end{cases} \quad (109)$$

Le calcul relatif au rayon ordinaire, nous permet d'évaluer la valeur approchée de la correction à apporter au théorème de MARTYN, lorsque l'on se trouve à proximité de la « réflexion » définie par $P - \sin^2 \varphi_0 = 0$.

Conclusion

La méthode de détermination des trajectoires de phase et d'énergie que nous venons d'exposer est susceptible d'un certain nombre d'applications que nous allons résumer brièvement.

1°) D'une part, nous pouvons déterminer en chaque point du parcours de l'onde la valeur de la vitesse de groupe à l'aide de la relation :

$$\mu' = \frac{c}{U} = \mu + f \frac{\partial \mu}{\partial f} \quad (1)$$

D'autre part, la polarisation peut être définie à l'aide du rapport :

$$\frac{E_{y0,e}}{E_{x0,e}} = - \frac{2i Y (1 - X) \cos \theta}{Y^2 \sin^2 \theta \pm \sqrt{Y^4 \sin^4 \theta + 4 Y^2 (1 - X)^2 \cos^2 \theta}} \quad (2)$$

Notons enfin que l'étude de l'approximation B.K.W. que l'on peut conduire suivant la méthode classique antérieurement exposée, conduit à un certain nombre de conditions restrictives, en plus de la condition de M. Louis de BROGLIE (2, 3). En particulier si les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} X &\ll 1, \\ X &\ll \frac{Y^2 - 1}{Y^2 \cos^2 \theta - 1} \end{aligned} \quad (3)$$

l'approximation de l'optique géométrique n'est plus valable [55]. Signalons également qu'une étude générale des conditions de couplage existant entre les ondes a été effectuée par RYDBECK [69] et par MM. JANCEL et KAHAN [70] à la suite d'une première étude générale due à ECKERSELEY [71].

2°) La méthode exposée dans ce chapitre peut être appliquée au problème de la détermination du parcours de certains atmosphériques de très grande longueur d'onde (siffleurs) dont le mécanisme de propagation a été indiqué par ECKERSELEY [53] et étudié systématiquement par STOREY [54].

D'après STOREY, la propagation de ces atmosphériques serait guidée par les lignes de force du champ magnétique terrestre, ce qui est en effet conforme à l'observation, la propagation s'effectuant uniquement dans le plan du méridien magnétique; mais notons que le terme de « guidage » a ici un sens équivoque. D'autre part, la « réflexion » aurait lieu dans l'ionosphère « extérieure », à des altitudes nettement supérieures à celle de la région F. Il s'agirait probablement d'une région ionisée réfléchissante vraisemblablement d'origine protonique.

D'après DUNGEY [72], MAEDA et KIMURA [73], on aurait pour expression de la loi de distribution de la densité électronique d'après les régions considérées et suivant les latitudes :

Pour les altitudes de 1 000 km à 16 500 km sous toutes latitudes :

$$N = 1,8 \cdot 10^{11} e^{-6,57 \cdot 10^{-4}(z-300)} \quad \text{par m}^3 (*) \quad (4)$$

Pour les altitudes de 300 à 1 000 km.

a) Pour les basses latitudes (35° N-35° S)

$$N = 1,24 \cdot 10^{12} e^{-3,45 \cdot 10^{-3}(z-300)} \quad \text{par m}^3 \quad (5)$$

b) Pour les hautes latitudes (90° N-35° N; 35° S-90° S)

$$N = 1,8 \cdot 10^{11} e^{-6,57 \cdot 10^{-4}(z-300)} \quad \text{par m}^3 \quad (6)$$

D'après ALPERT et ses collaborateurs [56], on aurait une loi du type :

$$\mu^2(z) = 1 - 0,96 \left(\frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 e^{-\alpha(z-1,2z_m)}. \quad (7)$$

Il est intéressant de préciser certains caractères généraux de la propagation des « siffleurs » mis en évidence la première fois par ECKERSELEY et par STOREY et que l'on peut obtenir également d'après la méthode exposée plus haut.

Les relations (6, 12, 13) § A permettent de déterminer le parcours de phase et l'on en déduit à l'aide des équations (6, 7) écrites en coordonnées sphériques les trajectoires d'énergie.

Cependant, il est plus pratique de décomposer les régions de l'ionosphère considérées en un certain nombre de tranches très petites à l'intérieur desquelles on peut considérer $\Delta\lambda$ comme constant, ainsi que Y, et d'effectuer le calcul de proche en proche pour la trajectoire entière. On peut utiliser pour δ au lieu des valeurs théoriques déduites de l'expression (86) § B les valeurs données par l'observation. Les calculs peuvent être effectués à l'aide du calculateur électronique.

D'après l'observation, la plus grande partie du parcours s'effectue suivant le mode quasi-longitudinale. La loi de ECKERSELEY

$$t \simeq D \cdot f^{-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

(t temps de parcours, D « dispersion » du sifflement, f fréquence) est vérifiée ainsi que l'a montré STOREY.

(*) L'altitude z est exprimée en kilomètres.

En effet, la relation

$$Y^4 \sin^4 \theta \ll 4 Y^2 \cos^2 \theta (1 - X)^2 \quad (Y \gg 1) \quad (9)$$

étant vérifiée (ondes très longues), nous déduisons alors de la relation de APPLETON-HARTREE :

$$\mu_e^2 \simeq 1 - \frac{X}{1 - Y \cos \theta} \simeq 1 + \frac{X}{Y \cos \theta} \simeq \frac{X}{Y \cos \theta} \quad \left(\frac{X}{Y} \gg 1 \right) \quad (10)$$

l'onde ordinaire étant absorbée.

D'autre part, le temps de parcours défini par (6, 9) § A

$$t = \frac{1}{c} \int_{s_0}^s \frac{\partial}{\partial \omega} (\mu \omega) ds \quad (11)$$

nous donne dans le cas de propagation Q.L.

$$t \simeq \frac{1}{c} \int_{s_0}^s \frac{\partial}{\partial \omega} \left(\sqrt{\frac{X}{Y \cos \theta}} \right) ds$$

c'est-à-dire

$$t \simeq \frac{1}{2c} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \int_{s_0}^s \omega_0 \sqrt{\frac{1}{\omega_H \cos \theta}} ds \quad (12)$$

qui nous montre que la relation de ECKERSELEY [8] est sensiblement satisfaite.

Nous voyons enfin que la discussion concernant l'étude des trajectoires peut être conduite suivant la méthode indiquée précédemment en adjoignant à l'expression (10) de l'indice les relations (6, 10) (6, 7) § A.

CHAPITRE 7

METHODES DE DETERMINATION DES HAUTEURS VRAIES DES COUCHES IONOSPHERIQUES

Certains problèmes de géophysique aboutissent à la résolution d'équations intégrales. Citons pour mémoire l'étude de la propagation des ondes sismiques [67] et l'étude de la distribution de l'ozone atmosphérique par la méthode de ROSSELAND [68]. Ce dernier problème offre d'ailleurs avec celui qui nous intéresse différentes analogies. Cependant, le problème de la détermination de la variation de la densité électronique avec l'altitude pour une couche ionosphérique donnée, peut, sous certains aspects, apparaître comme étant plus complexe. Ceci est dû au fait que dans un milieu ionisé anisotrope l'expression analytique de l'indice de réfraction conduit à des calculs laborieux.

A) Absence du champ magnétique terrestre.

Faisons d'abord abstraction de l'existence du champ magnétique. Notre problème peut alors être envisagé de deux points de vue différents :

1° On peut supposer que l'ionisation d'une région suit une loi du type de CHAPMAN ou d'EPSTEIN et nous sommes conduits à une loi de distribution de la densité électronique du type quadratique en première approximation.

$$X = \frac{1}{\gamma} \left[2 \left(\frac{z}{z_m} \right) - \left(\frac{z}{z_m} \right)^2 \right] \quad (1)$$

2° On peut chercher à déterminer directement la loi de variation de la densité électronique à partir des valeurs mesurées des hauteurs virtuelles (h_v) et de la fréquence critique (f_c).

La recherche des solutions du premier genre a été effectuée par APPLETON [58] qui a été conduit à déterminer les paramètres h_o et z_m . Dans le cas de la loi (1), il a obtenu l'expression suivante :

$$h_v(f) = h_o + z_m \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + \sqrt{\gamma}}{1 - \sqrt{\gamma}} \right) \quad (2)$$

La recherche des solutions du problème du second genre, problème inverse en quelque sorte du précédent a été effectuée par de GROOT [59] et RYDBECK [60] et la méthode étendue par M. COTTE lorsque l'on tient compte du champ magnétique [61]. En l'absence de champ magnétique la solution est obtenue à partir de l'équation intégrale d'ABEL. Nous avons :

$$h_v(f) = h_o + \int \frac{dz}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_o}{f} \right)^2}} \quad (3)$$

f_o étant une fonction de z ; inversement nous pouvons considérer z comme étant une fonction de f_o , de sorte que :

$$h_v(f) - h_o = \int_0^{f^2} \frac{z' d(f_o^2)}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_o}{f} \right)^2}} \quad (4)$$

expression que l'on peut ramener à la forme dite de SCHLOMILCH

$$z(f_1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h_v(f_1 \sin \varphi) d\varphi \quad (5)$$

f_1 étant une fréquence donnée.

B) Présence du champ magnétique terrestre.

Si l'on tient compte de la présence du champ magnétique les deux méthodes précédentes peuvent être généralisées.

1° Généralisation de la méthode d'APPLETON

Nous avons vu qu'en présence d'un champ magnétique extérieur, l'indice de réfraction d'un milieu ionisé anisotrope nous est donné par la relation de APPLETON-HARTREE que nous écrirons pour des raisons de commodité sous la forme :

$$\mu^2 = 1 - \frac{2X(1-X)}{D} \quad (6)$$

avec

$$\begin{aligned} D &= 2(1-X) - Y^2 \sin^2 \delta + S \\ S &= \pm \sqrt{Y^4 \sin^4 \delta + 4Y^2(1-X)^2 \cos^2 \delta} \end{aligned} \quad (7)$$

le signe (+) correspondant à l'onde ordinaire, le signe (—) à l'onde extraordinaire et nous avons pour expression de l'indice de groupe :

$$\mu' = \frac{2}{D\mu} \left[1 - \mu^2 - X^2 + \frac{(1 - X^2)(1 - \mu^2)Y^2 \cos^2 \delta}{S} \right] + \mu \quad (8)$$

que l'on peut obtenir à partir de la relation de SHINN et WHALE [62] et nous voyons que μ' est uniquement fonction de X , Y et δ . De sorte que l'intégrand de (6, 9) § A dans le cas d'un modèle parabolique sera uniquement fonction des grandeurs précédentes, pour une fréquence donnée, Y étant constant, X seul sera variable et nous obtenons ainsi compte tenu de (8) :

a) pour l'onde ordinaire :

$$h_{v,o}(f) = h_o + \frac{\gamma z_m}{2} \int_0^1 \frac{\Phi_o(Y, X) dX}{\sqrt{(1 - X)(1 - \gamma X)}} \quad (9)$$

b) pour l'onde extraordinaire :

$$h_{v,e}(f) = h_o + \frac{\gamma z_m}{2} \int_0^{1-Y} \frac{\Phi_e(X, Y) dX}{\sqrt{(1 - Y - X)(1 - \gamma X)}} \quad (10)$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} \Phi_o(Y, X) = \sqrt{1 - X} \mu'_o \\ \Phi_e(Y, X) = \sqrt{1 - Y - X} \mu'_e \end{cases} \quad (11)$$

On fait disparaître les singularités des intégrales précédentes en posant $1 - X = t^2$ pour l'intégrale (9) et $1 - \frac{X}{1 - Y} = t^2$ pour l'intégrale (10). On intègre alors numériquement par la méthode de GAUSS et l'on détermine h_o et z_m par la méthode des moindres carrés.

On peut procéder plus rapidement en utilisant les valeurs approchées de l'indice :

$$\begin{cases} \mu_o = \sqrt{\frac{(1 - X)(1 + Y - X)}{1 + Y - X - XY \cos^2 \delta}} \\ \mu_e = \sqrt{\frac{(1 - X - Y)(1 - X + Y)}{1 - X - Y^2 + XY \cos^2 \delta}} \end{cases} \quad (12)$$

ainsi que nous l'avons établi dans un précédent travail [63].

2°) Généralisation de la méthode de RYDBECK

L'indice μ est une fonction de la densité électronique et de la fréquence f :

$$\mu = \mu(\xi, f)$$

et nous avons :

$$h_v(f) = \int_0^{h(f)} \frac{\partial}{\partial f} (\mu f) dz \quad (13)$$

si l'on pose :

$$\begin{aligned} \xi_M &= \frac{\pi m f^2}{c^2} && \text{(pour le rayon ordinaire)} \\ \xi_M &= \frac{\pi m f^2}{e^2} \left(1 - \frac{f_H}{f} \right) && \text{(pour le rayon extraordinaire)} \end{aligned} \quad (14)$$

on est conduit à la résolution de l'équation intégrale de VOLTERRA de première espèce :

$$\Phi(f) = \int_0^{z_M} \mu(\xi, f) z'(\xi) d\xi \quad (15)$$

avec :

$$\Phi(f) = \frac{1}{f} \int_0^f h_v(f) df \quad (16)$$

$\Phi(f)$ est déterminé d'après les mesures.

Nous pouvons encore écrire l'expression (15) :

$$\Phi(\xi_M) = \int_0^{\xi_M} \mu(\xi, \xi_M) z'(\xi) d\xi \quad (17)$$

On peut procéder en deux étapes : on détermine $z'(\xi)$ et ensuite on en déduit par quadrature la loi de distribution $\xi(z)$.

Il y a avantage cependant à transformer l'intégrale de première espèce en une équation intégrale de seconde espèce du fait de l'existence de la singularité $\xi = \xi_M$.

On utilise la transformation classique de GOURSAT [64]. Cette transformation permet de substituer à l'équation d'ABEL généralisée une équation intégrale de seconde espèce. L'équation d'ABEL généralisée peut être résolue par itération du noyau. Il est cependant plus pratique une fois obtenue l'intégrale de seconde espèce d'utiliser la *méthode des différences*.

Les calculs sont en général laborieux, aussi y-a-t-il avantage à n'utiliser cette méthode que pour l'étude des ionogrammes singuliers tels qu'ils se présentent par exemple lorsque les régions ionosphériques considérées sont perturbées.

Autres méthodes

Dans ce qui suit, nous considérons uniquement le rayon ordinaire, le cas du rayon extraordinaire se traitant de façon analogue.

a) Nous admettons que la loi de variation quadratique de X est valable en première approximation. Rappelons que dans une loi quadratique, nous pouvons écrire :

$$h_v(f) = h_o + \frac{\gamma z_m}{2} \int_0^1 \mu'(Y, X) \frac{dX}{\sqrt{1 - \gamma X}}$$

où l'on peut utiliser pour $\mu'(Y, X)$ soit la valeur rigoureuse de l'indice, soit une expression approchée.

Si nous choisissons l'origine au maximum de la densité de la couche, nous avons :

$$1 - \gamma X = a_2 z^2 \quad (18)$$

et la demi-épaisseur nous est alors donnée par :

$$z_m = \frac{1}{\sqrt{a_2}}$$

Le modèle étant dans la plupart des cas parabolique en première approximation ainsi que nous le montre l'aspect même de l'ionogramme (absence de singularité et de variations brusques de la hauteur virtuelle), nous pouvons chercher un développement de $1 - \gamma X$ dont le terme principal soit $a_2 z^2$, nous savons *par hypothèse* qu'un tel développement est convergent et nous pouvons écrire :

$$1 - \gamma X = a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots \quad (19)$$

Pour z nous avons le développement inverse défini par :

$$z = \alpha_1 (1 - \gamma X)^{\frac{1}{2}} + \alpha_2 (1 - \gamma X) + \alpha_3 (1 - \gamma X)^{\frac{3}{2}} + \dots \quad (20)$$

Les coefficients α_i étant déterminés à l'aide des relations :

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1^2 a_2 \\ 0 = 2\alpha_2 \alpha_1 a_2 + \alpha_1^3 a_3 \\ 0 = (2\alpha_1 \alpha_3 + \alpha_2^2) a_2 + 3\alpha_1^2 \alpha_2 a_3 + \alpha_1^4 a_4 \\ \dots \end{cases} \quad (21)$$

Nous obtenons alors pour expression de la hauteur virtuelle :

$$h_v(f) = h_0 + \gamma \int_0^1 \Phi(t, Y) (1 - \gamma + \gamma t^2)^{-\frac{1}{2}} \Psi(t) dt \quad (22)$$

où l'on a posé :

$$\begin{cases} \Phi(X, Y) = \mu' \sqrt{1 - X} \\ 1 - X = t^2 \end{cases}$$

et :

$$\Psi(t) = \alpha_1 + \alpha_2 (1 - \gamma + \gamma t^2)^{\frac{1}{2}} + 3\alpha_3 (1 - \gamma + \gamma t^2) + \dots$$

Nous pouvons donc écrire :

$$h_v(f) = \alpha_0 + \gamma [\alpha_1 \varphi_1(f) + 2\alpha_2 \varphi_2(f) + 3\alpha_3 \varphi_3(f) + \dots] \quad (23)$$

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$ désignant les intégrales :

$$\begin{cases} \varphi_1(f) = \int_0^1 \frac{\Phi(t, Y) dt}{\sqrt{1 - \gamma + \gamma t^2}} \\ \varphi_2(f) = \int_0^1 \Phi(t, Y) dt \\ \varphi_3(f) = \int_0^1 \Phi(t, Y) \sqrt{1 - \gamma + \gamma t^2} dt \end{cases} \quad (24)$$

Les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \dots$ sont déterminés à l'aide de la méthode des moindres carrés.

b) On peut admettre également, comme loi de distribution de la densité électronique, la loi de distribution de CHAPMAN ou celle d'EPSTEIN, et nous pouvons utiliser l'approximation déjà utilisée :

$$Chp(z) \simeq \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi z}{2\rho} \right)$$

qui nous donne :

$$N = N_m \cos^2 \frac{\pi z}{4\rho} \quad (25)$$

Nous obtenons pour expression de la hauteur virtuelle :

$$h_v(f) = z_0 + \frac{2z_m}{\pi} \sqrt{\gamma} \int_0^1 \frac{\mu'(X, Y) dX}{\sqrt{X(1 - \gamma X)}}$$

où z_m désigne l'altitude du point d'inflexion.

Résultats numériques

L'approximation quadratique convient à l'étude des enregistrements réguliers.

Nous avons utilisé deux enregistrements d'hiver, obtenus à la station ionosphérique de Fribourg, relatifs à la région F2.

Le premier enregistrement (décembre 1950) nous donne pour valeur de la fréquence critique $f_c = 3,95$ (MHz). Le second (mars 1953) $f_c = 2,90$ (MHz). Nous avons utilisé pour valeur de δ , 26° mesurée à Fribourg et pour valeur de f_H ; $f_H = 1,20$ (MHz), nous avons mesuré respectivement :

- décembre 1950 : 31 hauteurs virtuelles (rayon ordinaire);
- mars 1953 : 23 hauteurs virtuelles (rayon ordinaire);
- mars 1953 : 15 hauteurs virtuelles (rayon extraordinaire).

Les résultats sont représentés sur les figures 12 et 13, 14 et le premier enregistrement nous donne :

$$\begin{cases} h_o = 265 \text{ km} \pm 4 \text{ km} \\ z_m = 108 \text{ km} \pm 4 \text{ km} \end{cases}$$

si l'on néglige le champ magnétique,

$$\begin{cases} h_o = 270 \text{ km} \pm 2 \text{ km} \\ z_m = 87 \text{ km} \pm 6 \text{ km} \end{cases}$$

en tenant compte du champ magnétique.

Nous voyons que si l'on néglige le champ magnétique, l'erreur absolue est de l'ordre de 20 %.

Le second enregistrement nous donne :

1°) En utilisant les valeurs relatives au rayon ordinaire :

$$\begin{cases} h_o = 235,4 \text{ km} \pm 0,4 \text{ km} \\ z_m = 63,4 \text{ km} \pm 0,4 \text{ km} \end{cases}$$

2°) En utilisant les valeurs relatives au rayon extraordinaire :

$$\begin{cases} h_o = 246,6 \text{ km} \pm 2 \text{ km} \\ z_m = 70,9 \text{ km} \pm 2 \text{ km} \end{cases}$$

On trouve ainsi un écart systématique entre les valeurs calculées à l'aide des hauteurs virtuelles extraordinaires et les valeurs mesurées. Cet écart peut s'expliquer si l'on admet l'existence d'une couche inférieure retardatrice de faible fréquence critique, cette dernière étant inférieure à la plus petite limite de la gamme de fréquences balayée par le sondeur (1.4 [MHz]).

Les enregistrements précédant l'ionogramme utilisé nous révèlent, en effet, l'existence d'une couche E sporadique allant en s'estompant progressivement jusqu'à disparaître sur l'enregistrement à partir duquel les mesures ont été effectuées.

Application de l'effet FARADAY

1°) Nous allons considérer le cas de deux ondes polarisées circulairement se propageant dans un milieu ionisé anisotrope.

Considérons à l'entrée du milieu une onde dont le vecteur électrique est dirigé suivant x , nous pouvons la représenter par la somme de :

$$\begin{aligned} E_{x_1} &= E_o \cos \omega t & E_{z_1} &= -E_o \sin \omega t \\ E_{x_2} &= E_o \cos \omega t & E_{z_2} &= +E_o \sin \omega t \end{aligned}$$

Si l'onde ordinaire se propage avec une vitesse v_o , l'onde extraordinaire avec la vitesse v_e , nous obtenons après un parcours de phase $ds_o \simeq ds_e = ds$

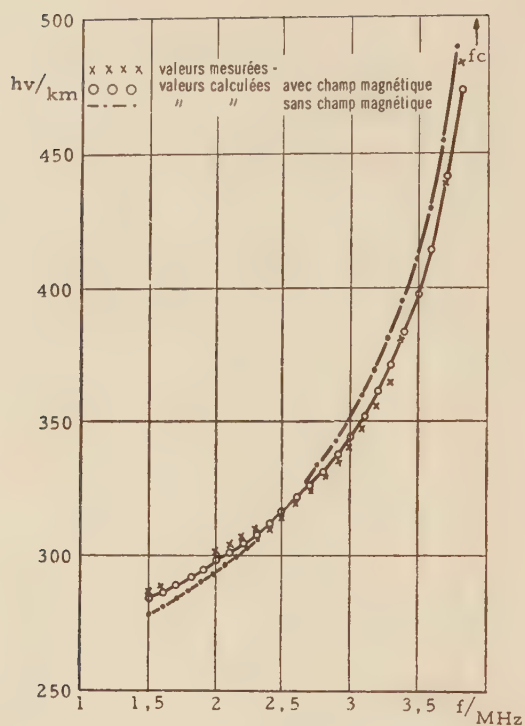


FIG. 12

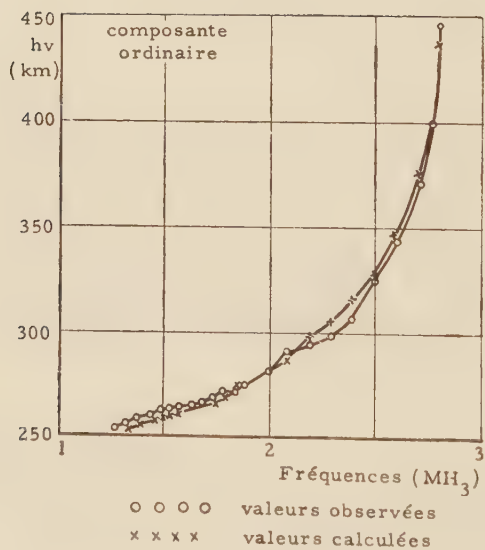


FIG. 13

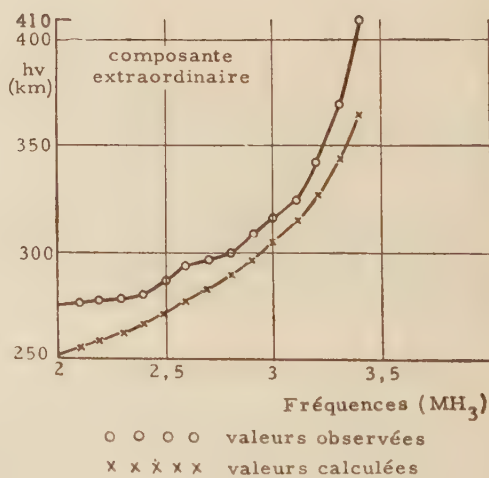


FIG. 14

$$\begin{aligned} E_{x_1} &= E_o \cos \omega \left(t - \frac{ds}{v_o} \right) & E_{z_1} &= -E_o \sin \omega \left(t - \frac{ds}{v_o} \right) \\ E_{x_2} &= E_o \cos \omega \left(t - \frac{ds}{v_e} \right) & E_{z_2} &= +E_o \sin \omega \left(t - \frac{ds}{v_e} \right) \end{aligned}$$

Le vecteur résultant a alors pour composantes :

$$\begin{aligned} E_x &= 2E_o \cos \omega \left[t - \frac{ds}{2} \left(\frac{1}{v_o} + \frac{1}{v_e} \right) \right] \cos \frac{\omega}{2} ds \left(\frac{1}{v_o} - \frac{1}{v_e} \right) \\ E_z &= 2E_o \cos \omega \left[t - \frac{ds}{2} \left(\frac{1}{v_o} + \frac{1}{v_e} \right) \right] \sin \frac{\omega}{2} ds \left(\frac{1}{v_o} - \frac{1}{v_e} \right) \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi une onde plane polarisée dont la direction fait un angle :

$$d\Theta = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{v_o} - \frac{1}{v_e} \right) ds \quad (27)$$

avec la direction primitive : c'est l'effet FARADAY.

Nous avons alors pour un parcours défini par les limites z_0, z_1 :

$$\Theta = \frac{\omega}{2c} \int_{(z_0)}^{(z_1)} (\mu_o - \mu_e) ds$$

2°) Dans le cas de l'incidence oblique l'angle étant supposé faible et d'autre part la pulsation assujettie aux conditions :

$$\omega \gg \omega_o \quad \text{et} \quad \omega \gg \omega_H \cos \theta.$$

Nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \mu_o^2 \simeq 1 - \frac{\omega_o^2}{\omega(\omega + \omega_H \cos \theta)} \\ \mu_e^2 \simeq 1 - \frac{\omega_o^2}{\omega(\omega + \omega_H \cos \theta)} \end{cases} \quad (28)$$

Nous avons deux ondes polarisées circulairement et de sens opposés.

On déduit des conditions imposées :

$$\mu_o - \mu_e \simeq \frac{\omega_o^2 \omega_H}{\omega^3} \cos \theta.$$

Les trajets ds_o, ds_e étant peu différents :

$$\Theta \simeq \frac{\omega}{2c} \int (\mu_o - \mu_e) ds \simeq \frac{1}{2c \omega^2} \int \omega_o^2 \omega_H \cos \theta ds \quad (29)$$

en tenant compte de la relation :

$$\cos \theta = \cos \varphi \cos \delta + \sin \varphi \sin \delta \cos \Phi$$

nous obtenons :

$$\Theta = \frac{\omega_H}{2c \omega^2} \frac{4\pi e^2}{m} \cos \delta \int_{z_0}^{z_1} N dz + \sin \delta \cos \Phi \frac{\omega_H}{2c} \sin \varphi_0 \int_{z_0}^{z_1} \frac{X dz}{\sqrt{\cos^2 \varphi_0 - X}} \quad (30)$$

et nous voyons qu'à incidence normale le second terme disparaît de sorte que :

$$\Theta_1 \simeq \frac{\omega_H}{2c \omega^2} \frac{4\pi e^2}{m} \cos \delta \int_{z_0}^{z_1} N dz. \quad (31)$$

Nous pouvons encore écrire pour valeur de l'expression précédente :

$$\Theta_1 \simeq 2,97 \cdot 10^{-2} H f^{-2} \cos \delta \int N dz$$

qui est la formule de HATANAKA [65].

Par contre, à incidence oblique, on doit tenir compte de la présence du second terme

$$\Theta_2 \simeq \sin \delta \sin \varphi_0 \cos \Phi \frac{\omega_H}{2c} \int_{z_0}^{z_1} \frac{X dz}{\sqrt{\cos^2 \varphi_0 - X}}.$$

Si l'on possède un nombre suffisant de mesures de Θ , on peut déterminer la variation de la densité électronique suivant le parcours de l'onde.

Parmi les études concernant l'effet FARADAY, signalons les travaux de MURRAY et HARGREAVES [66] relatifs aux échos radioélectriques lunaires.

Conclusion

Les méthodes précédentes qui permettent de déterminer à partir d'enregistrements réguliers les paramètres caractéristiques de la région ionosphérique explorée se prêtent à une étude systématique des variations journalières et saisonnières de l'ionisation. D'autre part, elles peuvent servir de moyens d'investigation en ce qui concerne l'étude d'une couche E nocturne de faible densité électronique que l'on peut supposer constante. L'examen du phénomène de retard, que l'on met en évidence à l'aide des deux composantes ordinaire et extraordinaire de l'ionogramme, permet une étude de l'évolution des couches faiblement ionisées durant la nuit.

Enfin à partir des enregistrements irréguliers du genre de ceux signalés plus haut nous pouvons déterminer les fluctuations de courtes périodes subies par la densité électronique, le calcul de la trajectoire à incidence normale d'autre part nous donne une estimation de la vitesse de déplacement latéral et vertical de certaines perturbations.

Nous avons ainsi une méthode précise d'investigation de la microstructure d'une région ionisée.

APPENDICE I

EQUATION DE PROPAGATION

Dans le cas isotrope l'équation (1,12) s'écrit pour l'incidence normale

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \varepsilon'(\omega, z) E = 0. \quad (1)$$

On admet que le champ E ne dépend que de z ; la troisième composante de l'équation a pour expression :

$$\varepsilon'(\omega, z) E_z = 0.$$

Si $\varepsilon'(\omega, z) \neq 0$ nous devons avoir $E_z = 0$ et nous avons des ondes purement transversales. Le cas $\varepsilon'(\omega, z) = 0$ répond à la possibilité d'existence, dans le plasma, d'ondes longitudinales. Dans ce cas $E_z \neq 0$ et la fréquence est déterminée à partir des conditions $\varepsilon'(\omega, z) = 0$.

Dans le cas anisotrope l'équation d'ondes générale

$$\nabla^2 \vec{E} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(\vec{D} - \frac{4\pi i}{\omega} \dot{\vec{j}}\right) - \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) = 0 \quad (2)$$

nous conduit aux expressions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(D_x - \frac{4\pi i}{\omega} \dot{j}_x\right) = 0 \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(D_y - \frac{4\pi i}{\omega} \dot{j}_y\right) = 0 \\ D_z - i \frac{4\pi}{\omega} \dot{j}_z = 0 \\ D_i - i \frac{4\pi}{\omega} \dot{j}_i = \sum_{k=1}^3 \varepsilon'_{ik}(\omega, z) E_k. \end{array} \right. \quad (3)$$

APPENDICE II

TRANSFORMATION DE L'INTEGRALE AUXILIAIRE X (u)

Nous commençons par le rayon ordinaire; d'ailleurs la plus grande partie des calculs sera utilisable dans les deux cas.

Nous avons :

$$X(u) = \int_u^1 \frac{u(1-u) du}{[u-a+\lambda\sqrt{u^2+b^2}] \sqrt{(u^2+b^2)} (u+c)}. \quad (1)$$

Nous pouvons séparer cette intégrale en deux parties et écrire :

$$(1-\lambda^2) X = A - \lambda B \quad (2)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \int_u^1 \frac{(1-u)(u-a) du}{(u-d) \sqrt{(u^2+b^2)} (u+c)} \\ B = \int_u^1 \frac{(1-u) du}{(u-d) \sqrt{u+c}} \end{array} \right. \quad \left(d = \frac{2a}{1-\lambda^2} \right) \quad (3)$$

1) Le calcul de B est immédiat et donne

$$B = (1-d) \left[\frac{1}{\sqrt{c+d}} \operatorname{Ln} \frac{(\sqrt{1+c}-\sqrt{c+d})(\sqrt{u+c}+\sqrt{c+d})}{(\sqrt{1+c}+\sqrt{c+d})(\sqrt{u+c}-\sqrt{c+d})} \right]$$

2) L'intégrale A se décompose sous la forme :

$$A = A_0(I_0 - a_1 I_1 + a_2 I_2)$$

avec

$$I_0 = \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)} (k'^2 + k^2 v^2)}$$

$$I_1 = \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{(1-v) \sqrt{(1-v^2)} (k'^2 + k^2 v^2)}$$

$$I_2 = \int_{v_0}^{v_1} \frac{dv}{(1+v) \sqrt{(1-v^2)(k'^2 + k^2 v^2)}}$$

où l'on a posé :

$$\begin{aligned} u &= \frac{H(1+v) - c(1-v)}{1-v}; & H^2 &= b^2 + c^2 \\ k^2 &= \frac{H+c}{2H}; & k'^2 &= \frac{H-c}{2H} \\ v_0 &= \frac{1+c-H}{1+c+H}; & v_1 &= \frac{u+c-H}{u+c+H} \\ A_0 &= \frac{1}{\sqrt{H}} \frac{(H+c+1)(H+c+a)}{H+c+d}; & a_1 &= \frac{(1-v_0)(1+n)}{1+p} \\ a_2 &= \frac{(v_0+p)(n-p)}{1+p}; & p &= \frac{H-d-c}{H+d+c}; & n &= \frac{H-a-c}{H+a+c}. \end{aligned}$$

On obtient pour I_0 :

$$I_0 = \arg. cn v_1 - \arg. cn v_0$$

et pour l'intégrale I_1 :

$$I_1 = P_1(v_1) - P_1(v_0) + R_1(v_1) - R_1(v_0)$$

en utilisant :

$$\begin{aligned} P_1(x) &= \int_0^x \frac{dv}{(1-v^2) \sqrt{\Delta}} \\ R_1(x) &= \int_0^x \frac{v dv}{(1-v^2) \sqrt{\Delta}} \end{aligned} \quad \Delta = (1-v^2)(k'^2 + k^2 v^2)$$

ce qui nous donne

$$P_1(x) = (K - E) - [u - E(u)] + \frac{x \sqrt{1 - k^2(1 - x^2)}}{\sqrt{1 - x^2}}$$

u , $E(u)$ étant les intégrales de LEGENDRE module k^2 argument Φ ; K , E les intégrales complètes; on a posé

$$sn u = \sin \Phi = \sqrt{1 - x^2}$$

d'où

$$R_1(x) = \frac{\sqrt{1 - k^2(1 - x^2)}}{\sqrt{1 - x^2}} - \sqrt{1 - k^2}$$

Pour I_2 nous obtenons

$$I_2 = -p [P_2(v_1) - P_2(v_0)] + [R_2(v_1) - R_2(v_0)]$$

avec

$$\begin{aligned} R_2(x) &= \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-x^2} (h^2 - y^2) \sqrt{1 - k^2 y^2}} \\ P_2(x) &= \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-x^2} (h^2 - y^2) \sqrt{(1-y^2)(1-k^2 y^2)}} \\ R_2 &= \frac{1}{2h(1 - k^2 h^2)^{1/2}} \left| \operatorname{Ln} \left| \frac{\rho + t}{\rho - t} \right| \right|_{t_0}^{t_1}; \quad (h^2 = 1 - p^2) \end{aligned}$$

$$e^2 = \frac{(1-p^2)k^2}{1-(1-p^2)k^2} \quad t_1 = \frac{k}{k'} \quad t_0 = k \sqrt{1-x^2} / \sqrt{k'^2 + k^2 x^2}$$

L'intégrale $P_2(x)$ est classique, en posant $y = snu = \sqrt{1-x^2}$ on obtient

$$P_2 = \frac{1}{sna \, dna \, cna} \left(-(K-u) Z(a) - \frac{1}{2} \text{Ln} \frac{H(a+u)}{H(a-u)} \right)$$

Ces formules permettent de calculer l'intégrale I_2 . Ayant calculé les intégrales I_0 , I_1 , I_2 , on en déduit l'intégrale A , et ensuite l'intégrale X à l'aide des relations (2) et (3). Nous avons posé $cn a = p$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] H. A. LORENTZ, Theory of electrons (2^e édition, Teubner 1916), p. 135.
- [2] H. A. LORENTZ, Theory of electrons (2^e édition, Teubner 1916), p. 309.
- [3] DRUYVESTEIN, *Physica*, **1**, 69 (1930).
- [4] DEBYE et HÜCKEL, *Phys. Zeitsch*, **24**, 185 (1923).
- [5] A. MESSIAH, Mécanique quantique (Paris, 1959).
- [6] GANS, *Ann. d. Physik*, **47** (1915).
- [7] VAN DER WYCK, Thèse, Delft, 1946.
- [8] P. S. EPSTEIN, *Proc. Nat. Acad. Sc.*, Washington, **16**, 627 (1930).
- [9] K. RAWER, *Ann. der Phys.*, **35**, 385 (1939).
- [10] K. RAWER, *Z. angew. Phys.*, **3**, 226 (1951).
- [11] W. ROSS, Radio Research, special report n° 19, Londres, 1948.
- [12] Mac CULLAGH, *Proc. Roy. Irish. Acad.*, **1**, 22 (1936).
- [13] A. CAUCHY, *Compt. Rend. Ac. des Sc.*, **7**, 953 (1838).
- [14] H. ARZELIES, *Ann. de Phys.*, **2**, 154 (1947).
- [15] H. ARZELIES, Thèses, Paris, 1946.
- [16] A. SOMMERFELD et I. RUNGE, *Ann. der Phys.*, **35**, 277 (1911).
- [17] Louis de BROGLIE, Optique électronique et corpusculaire (Hermann édit., 1949, p. 16).
- [18] P. S. EPSTEIN, *Proc. Nat. Ac. Sc.*, Washington, **16**, 40 (1930).
- [19] L. BRILLOUIN, *Ann. der Phys.*, **44**, 203 (1914).
- [20] A. SOMMERFELD, *Ann. der Phys.*, **44**, 177 (1914).
- [21] E. ARGENCE, *Nuovo Cimento*, suppl. vol. 4, série X, p. 1478.
- [22] H. ARZELIES, Thèses, Paris, 1946.
- [23] H. BREMMER, Terrestrial Radio Waves.
- [24] Ia. L. ALPERT, E. L. FEINBERG et V. A. GINSBURG, La propagation des ondes radioélectriques, Moscou, 1953 (en russe).
- [25] MAJUMDAR R. C., *Zeits. f. Phys.*, **107**, 599, 1937.
- [26] NICOLET M. et BOSSY L., *Ann. de Geoph.*, **5**, 275, 1949.
- [27] ARGENCE E., MAYOT M. et RAWER K., *Ann. de Géoph.*, **6**, 242, 1950.
- [28] CHAPMAN S., *Proc. Roy. Soc.* — A, **132**, 353, 1931.
- [29] HUXLEY L. G. et ZAAZOU A. A., *Proc. Roy. Soc.*, **196**, 402, 427, 1949.
- [30] PAWSEY J. L. et BRACEWELL R. N., *Radio Astronomy* (Oxford University Press, 1955).
- [31] RAWER K. et ARGENCE E., *Compte-rendu Aca. Sc.*, **239**, 1066, 1954.
- [32] ARGENCE E. et RAWER K., *Nuovo cimento*, suppl. n° 4, vol. 4, série X, p. 1511.
- [33] RATCLIFFE J. A., *Proc. Roy. Soc.*, A, **151**, 370, 1935.
- [34] PIGGOTT W. R., *Jour. Inst. Electr. Eng.*, **10**, 111, 61, 1953.
- [35] BRAMLEY E. N., *Proc. Roy. Soc.*, A **220**, 39, 1953.
- [36] WHITTEHEAD J. D., *Journ. Atmos. Ter. Phys.*, **9**, 269 (1956).
- [37] NEWELL H. E., High Altitude Rocket Research (*Academic Press*, n° 4, 1953).
- [38] GHOSH M., *Journ. Atmos. Terr. Phys.*, **8**, 117, 1956.
- [39] COTTE M., *Compt. Rend. Acad. Sc.*, **22**, 605, 1946. Notre Préliminaire n° 96 du L.N.R.
- [40] MILLINGTON G., *Nature*, **163**, 213, 1949.
- [41] POEVERLEIN H., *Bayerrische Akad. d. Wissensch.*, p. 75, 201, 1948.
- [42] BORN M., *Optik* (Berlin, Springer, 1933).
- [43] POEVERLEIN H., *Z. angew. Phys.*, **2**, 152, 1950.
- [44] BOOKER H. G., *Geoph. Rés.*, **54**, 243, 1949.
- [45] MILLINGTON H. G., *Proc. I.E.E.*, **98**, IV, 1, 1951.
- [46] POEVERLEIN H., *Z. angew. Phys.*, **2**, 152, 1950.
- [47] APPLETON E. V. et BEYNON W. J. G., *Proc. Phys. Soc.*, **59**, 58, 1940.
- [48] GREEN A. L., *Rad. propr. Bulletin Australia*, oct. 1950.
- [49] GERSON N. C. et SEATON S. L., *Journ. of the Franklin Inst.*, **246**, 483, 1948.
- [50] FORSGREN S. K. H., *Trans. Chalmers. Univ.*, 104, 1951.
- [51] SUCHY K. et VILA, *Ann. de Geophys.*, **12**, 277, 1956.
- [52] ARGENCE E., RAWER K., SUCKY K., *Compt. Rend. Acad. Sc.*, **236**, 190, 1953.
- [53] ECKERSLEY T. L., *Nature*, **135**, 104, 1935.
- [54] STOREY L. R. O., *Phil. Trans.*, A **246**, 908, 1953.
- [55] GUERCHMANN B. N., GINSBURG V. L., DENISOV N. G., *Uspek i Fis. Nauk*, LXI, 4 avril 1957.
- [56] ALPERT J. L., DOBRIAKOVA F. F., TCHOUDESSENKO, SHAPIRO B. S., *Doklady Acad. Sc. U.R.S.S.*, **120**, 4, 743, 1958.
- [57] ALPERT Ia. L., FEINBERG E. L. et GINSBURG V. L., Propagation des ondes radioélectriques, Moscou, 1953.
- [58] APPLETON E. V., *Proc. Roy. Soc.*, A **162**, 451, 1937.

- [59] DE GROOT W., *Phil. Mag.*, **10**, 521, 1930.
- [60] RYDBECK O. E., *Phil. Mag.*, **30**, 282, 1940.
- [61] COTTE M., Note Préliminaire du L.N.R., n° 110 (1949).
- [62] SHINN D. H. et WHALE H. A., *J. Atmos. Terr. Phys.* **2**, 85, 1952.
- [63] ARGENCE E. et MAYOT M., *Jour. of Geoph. Res.*, **58**, 147, 1953.
- [64] GOURSAT E., Cours d'Analyse, t. III, Paris, 1949.
- [65] HATANAKA T., Scientific Report n° 5, Air Force Cambridge (U.S.A.), 30 Août 1955.
- [66] MURRAY W. A. et HARGREAVES J. K., *Nature*, **173**, 944, 1954.
- [67] JEFFREYS H., *The Earth* (Cambridge Univ. Press).
- [68] ROSSELAND, *Gerl. Beitr. Z. Geoph.*, **24**, 1, 1929.
- [69] RYDBECK O. E., *Jour. Appl. Phys.*, **21**, 1205, 1950.
- [70] JANCEL R. et KAHAN Th., *The Physics of the Ionosphere*, Symposium de Cambridge, Londres, 1955.
- [71] ECKERSLEY T. L., *Proc. Phys. Soc.*, **63 B**, 49, 1950.
- [72] DUNGEY, *The Physics of the Ionosphere*, (Symposium de Cambridge, Londres, 1955).
- [73] MAEDA K. et KIMURA I., *Rep. of Ionosphere Res. Jap.*, X, 105, 1956.

TABLE DES MATIÈRES

<i>Introduction</i>	1
---------------------------	---

Milieu isotrope

CHAPITRE 1. — Caractères généraux de la propagation d'une onde plane	3
» 2. — Propagation d'une onde dans un milieu isotrope inhomogène	9
» 3. — Propagation à incidence oblique dans un milieu ionisé absorbant isotrope	21
» 4. — Fréquence de collisions. Influence de la structure des couches sur l'absorption sélective. Détermination du nombre de chocs	31

Milieu anisotrope

» 5. — Influence d'un champ magnétique extérieur constant	45
» 6. — Détermination des trajectoires de l'onde dans un milieu anisotrope transparent	48
» 7. — Méthodes de détermination des hauteurs vraies des couches ionosphériques	77

<i>Appendices</i>	85
-------------------------	----

<i>Bibliographie</i>	89
----------------------------	----

IMPRIMERIE LOUIS-JEAN - GAP

Dépot légal : 96 - 1961

DEUXIEME THESE

PROPOSITIONS DONNEES PAR LA FACULTE

"Vérifications de la théorie de la Relativité généralisée.

Utilisation des satellites artificiels"

Vu et approuvé

Paris, le 20 Juin 1959

Le Doyen de la Faculté des Sciences

J. PERES

*Vu
et Permis d'imprimer*

*Le Recteur de l'Académie
de Paris*

Jean SARRAILH

